公立大学中期日程

2022年度

＜工　学　部＞

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．
2　問題冊子は全部で10ページ，解答用紙は全部で３枚である．脱落のあった場合には申し出ること．
3　すべての解答用紙の所定欄に，それぞれ受験番号（左右２箇所），氏名を必ず記入すること．
4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．
5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．
6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．
7　解答終了後，配付された解答用紙はすべて提出すること．
8　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．
9　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問 （40点）

次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}, \\ n^3 x_{n+1} = (n+1)^3 x_n - cn^2(n+1)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

ただし，c は正の定数である．以下の問いに答えよ．

問 1　　$y_n = \dfrac{x_n}{n^3}$ とおく．数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

問 2　　問 1 で定義した y_n に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ となるような c の値を求めよ．

問 3　　c が問 2 で求めた値をとるとき，次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{3}{4}\pi x_n\right)$$

（第 1 問の問 1，問 2，問 3 については計算の過程を記入しなくてよい．）

（余　　白）

第 2 問 （40点）

1 つのさいころを投げて，数直線上の点 Q を次のルールに従って動かすゲームを考える.

- 1，2，3 のいずれかの目が出た場合，Q を正の向きに 1 だけ動かす.
- 4 または 5 の目が出た場合，Q を負の向きに 1 だけ動かす.
- 6 の目が出た場合，Q を動かさない.

さいころを繰り返し投げて，Q の座標がはじめて n または $-n$ になった時点でゲームを終了する．ただし Q は最初に原点の位置にあるとし，n は 2 以上の自然数とする．自然数 k に対して，さいころを k 回投げた時点でゲームが終了する確率を $P(k)$ とおく．以下の問いに答えよ.

問 1　$P(n)$ を求めよ.

問 2　$P(n+1)$ を求めよ.

問 3　$P(n+2)$ を求めよ.

（第 2 問の問 1，問 2，問 3 については計算の過程を記入しなくてよい.）

（余　　白）

第　3　問（40点）

自然数 n と実数 t に対して，

$$I = \int_0^{\pi} (\sin x - t\cos 2nx)^2 dx$$

とおく．以下の問いに答えよ．

問 1　　I を n と t を用いて表せ.

問 2　　I を t の関数と考える．I が最小になる t の値を n を用いて表せ.

問 3　　問 2 で求めた t の値を t_n とおく．このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ の和を求めよ.

（第 3 問の問 1，問 2，問 3 については計算の過程を記入しなくてよい.）

（余　　白）

第　4　問 （60点）

$x > 0$ のとき，関数 $f(x)$ を $f(x) = x^{-x}$ と定める．以下の問いに答えよ．

問 1　　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

問 2　　$f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

問 3　　$x > 0$ に対して，$g(x) = \dfrac{xf''(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

問 4　　問 3 で求めた関数 $g(x)$ の極大値とそのときの x の値を求めよ．

問 5　　問 3 で求めた関数 $g(x)$ の極小値とそのときの x の値を求めよ．

問 6　　曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

（第 4 問の問 1，問 2，問 3，問 4，問 5，問 6 については計算の過程を記入しなくてよい．）

（余　　白）

第　5　問（60点）

a を 2 と異なる実数とし，関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x) = \frac{ax^2 + (2-a)x + a}{x^2 + 1}$$

以下の問いに答えよ．

問 1　$a > 2$ のとき，$h(x)$ の極小値を a を用いて表せ．また，極小値を与える x の値を求めよ．

問 2　$a < 2$ のとき，$h(x)$ の極小値を a を用いて表せ．また，極小値を与える x の値を求めよ．

問 3　$h(x)$ の極小値が 1 より大きくなるような a の値の範囲を求めよ．

問 4　曲線 $y = h(x)$ の原点を通る接線の本数を m とおく．ただし，m は 0 以上の整数である．a が問 3 で求めた範囲にあるとき，m の値を求めよ．

問 5　問 3 で求めた範囲にある実数 a と正の実数 b が次の等式を満足する．

$$\lim_{t \to +0} t^{-b} \int_{-t^a}^{t^a} |h(x) - a| dx = \frac{b}{3}$$

このとき，a と b の組 (a, b) を求めよ．

（第 5 問の問 1，問 2，問 3，問 4，問 5 については計算の過程を記入しなくてよい．）