

2022年度

数 学 問 題

現代システム科学域〔知識情報システム学類, 学域募集(英・数型)〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で9ページ、解答用紙は全部で4枚である。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙の各ページ所定欄に、それぞれ受験番号(最後のページは、左右2箇所)、氏名を必ず記入すること。なお、解答用紙は上部で接着してあるので、はがさず解答すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答以外のことを書いたときは、該当箇所の解答を無効とすることがある。
- 6 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが、採点はしない。
- 7 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
- 8 問題冊子は持ち帰ること。

(余 白)

第 1 問 (50点)

\log を自然対数, e をその底とする. 次の問いに答えよ.

問 1 $x \geq 0$ のとき,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ.

問 2 $t \geq 0$ とする. 次の極限を t を用いて表せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nt} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n^2}$$

問 3 問 2 で求めた極限を $f(t)$ とおく. このとき

$$\int_0^{100} f(t) dt < \frac{e^{5000}}{50}$$

が成り立つことを示せ.

(余 白)

第 2 問 (50点)

n を 2 以上の整数とする. 1 から 6 までの目のある 1 個のさいころを n 回続けて投げるとき, n 回目ですべて直前の回と同じ目が出る確率を P_n で表す. 次の問いに答えよ.

問 1 P_n を n を用いて表せ.

問 2 $S_n = \sum_{k=2}^n P_k$ を n を用いて表せ.

問 3 $S_n \geq \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ.

問 4 $E_n = \sum_{k=2}^n kP_k$ を n を用いて表せ.

(余 白)

第 3 問 (50点)

p, q を自然数とする. 次の問いに答えよ.

問1 $p = 7, q = 11$ のとき, 等式 $px + qy = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ.

問2 $p = 6, q = 9$ のとき, 等式 $px + qy = 1$ を満たす整数 x, y の組は存在しないことを示せ.

問3 i を虚数単位とする. 自然数 n に対して, 集合 X_n を

$$X_n = \left\{ \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k \mid k \text{ は整数} \right\}$$

と定める. また, 等式 $px + qy = 1$ を満たす整数 x, y の組が存在すると仮定する. このとき, 集合 X_{pq} に属するすべての数は, X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されることを示せ.

問4 集合 X_n は問3 で定めたものとする. 複素数

$$\cos \frac{2\pi}{pq} + i \sin \frac{2\pi}{pq}$$

が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき, p と q は互いに素であることを示せ.

(余 白)

第 4 問 (50点)

実数 t に対して,

$$f(t) = 2 \cos t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \sin t - \sin 2t$$

とおく. t を媒介変数として $x = f(t)$, $y = g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち,

$$0 < t < \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{4}{3}\pi < t < 2\pi$$

の部分それぞれ C_0 , C_1 , C_2 とする. また, $0 < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して, 点 $(f(\alpha), g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする. 次の問いに答えよ.

問 1 次の等式を示せ.

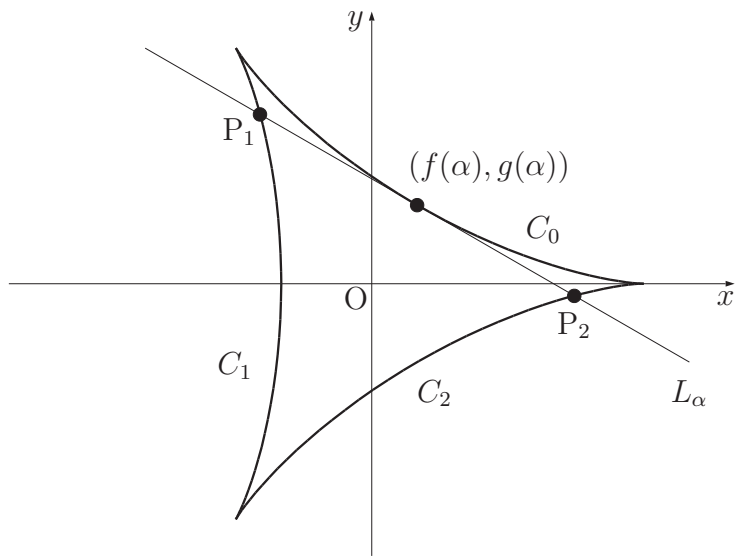
$$f(t) \sin \frac{\alpha}{2} + g(t) \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \left(t + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(2t - \frac{\alpha}{2} \right)$$

問 2 次の等式を示せ.

$$(f(t) - f(\alpha)) \sin \frac{\alpha}{2} + (g(t) - g(\alpha)) \cos \frac{\alpha}{2} = 4 \left(\sin \frac{t - \alpha}{2} \right)^2 \sin \left(t + \frac{\alpha}{2} \right)$$

問 3 接線 L_α の傾きを $\tan \theta$ と表す. ただし $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. このとき, θ を α を用いて表せ.

問 4 L_α と C_1 の交点を P_1 とし, L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき, 線分 P_1P_2 の長さは α によらず一定であることを示せ.



C_0, C_1, C_2 の概形