公立大学中期日程

2023 年度

<工　学　部>

数　学　問　題

注 意 事 項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で10ページ，解答用紙は全部で３枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　すべての解答用紙の所定欄に，それぞれ受験番号（左右２箇所），氏名を必ず記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　解答終了後，配付された解答用紙はすべて提出すること．

8　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

9　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問（50点）

（ **第 1 問** の問 1，問 2，問 3，問 4，問 5 については解のみを記入すること.）

定数 a は正の実数とする．$x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = a\sqrt{x^2 - 1}$$

を考える．また，点 $(t,\ f(t))$（ただし，$t > 1$）における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．a, t のうち必要なものを用いて，以下の問いに答えよ.

問 1　　接線 ℓ の方程式を答えよ.

問 2　　接線 ℓ と x 軸の交点の x 座標を答えよ.

問 3　　接線 ℓ と直線 $y = ax$ の交点の座標を答えよ.

問 4　　接線 ℓ と x 軸，および直線 $y = ax$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を答えよ.

問 5　　極限 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} S(t)$ を答えよ.

（余　　白）

第　2　問（50点）

（ **第 2 問** の問 1，問 2，問 3 については解のみを記入すること.）

四面体 OABC があり，OA $=4$, OB $=5$, OC $=3$, $\angle$AOB $=\angle$BOC $=\angle$AOC $=90^\circ$ であるとする．$0<t<1$ である実数 t に対し，線分 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を D，線分 AB を $(1-t):t$ に内分する点を E，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を F，線分 CO を $(1-t):t$ に内分する点を G とする．t を用いて，以下の問いに答えよ．

問 1　　四角形 DEFG の面積を答えよ．

問 2　　四角形 DEFG を含む平面を α とするとき，点 O から平面 α に下した垂線と α の交点を H とする．線分 OH の長さを答えよ．

問 3　　四面体 OABC を平面 α で 2 つの部分に分けたとき，頂点 O を含む部分の体積を答えよ．

（余　　　白）

第 3 問 (50点)

(**第 3 問** の問 1，問 2，問 3，問 4，問 5 については解のみを記入すること.)

空(から)の壺(つぼ)がある．また，袋に,「壺を空にする」と書かれたカードが 1 枚,「 0 」 と書かれたカードが 1 枚,「 1 」 と書かれたカードが 2 枚,「 2 」と書かれたカードが 1 枚，計 5 枚のカードが入っている．以下の操作を考える.

操作 : 袋からカードを 1 枚引き，カードに書かれている数字の数だけ玉を壺に入れる．ただし，カードに「壺を空にする」と書かれている場合は，壺を空にする．いずれの場合も，引いたカードは袋に戻す.

n を $n \geqq 1$ である整数とする．操作を n 回行ったあとに，壺が空である確率を p_n，壺に入っている玉の個数が 1 である確率を q_n とする．以下の問いに答えよ．ただし，玉は十分多くあるものとする.

問 1　p_{n+1} を p_n の式で表せ.

問 2　数列 $\{p_n\}$ の一般項を答えよ.

問 3　q_{n+1} を p_n と q_n の式で表せ.

問 4　$r_n = 5^n q_n$ とおく．$r_{n+1} - r_n$ を n の式で表せ.

問 5　数列 $\{q_n\}$ の一般項を答えよ.

（余　　白）

第 4 問 （50点）

（ **第 4 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること.）

t は実数とし，$s = \dfrac{t}{t^2+4t+9}$ とする．x の関数

$$f(x) = e^{2x} + 10se^{x+1} + 2e^2x$$

を考える．以下の問いに答えよ．

問 1　$f(x)$ が，極大値および極小値をそれぞれただ一つの x に対してとるように，t の値の範囲を答えよ．

問 2　t は問 1 の範囲にあるとする．このとき，$f(x)$ は $x = x_1$ で極大値をとり，また，$x = x_2$ で極小値をとるとし，$L = f(x_1) + f(x_2)$ とおく． s を用いて，L を表せ．

問 3　t は問 1 の範囲にあるとする．問 2 で与えた L が最小となる t の値，およびそのときの L の値を答えよ．

問 4　t の値が問 3 で求めたものであるとき，積分

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

の値を答えよ．ただし，x_1, x_2 は問 2 で与えたものである．

（余　　白）

第　5　問 （40点）

（ **第 5 問** の問 1，問 2 については解のみを記入すること.）

s, t を実数とし，x の関数 $f(x) = 3sx^4 + 35tx^2 + 15$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

問 1　積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$ を計算し，s, t を用いて答えよ．

問 2　問 1 の I が最小となる s と t の値を答えよ．

問 3　s と t が問 2 で求めた値のとき，直線 $y = 15$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を答えよ．