前期日程

2023 年度

数　学　問　題

現代システム科学域〔環境社会システム学類（理・数型），心理学類（理・数型），学域募集（理・数型）〕・経済学部・商学部・看護学部・生活科学部

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で 8 ページ，解答用紙は全部で 4 枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右 2 箇所），氏名を必ず記入すること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

8　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問 （50点）

1 回の試行ごとに赤玉か白玉を 1 個出す機械を考える．この機械からは 1 回目の試行では赤玉か白玉がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るが，2 回目以降には直前に出たものと同じ色の玉が α の確率で，直前に出たものと異なる色の玉が $1-\alpha$ の確率で，それぞれ出るものとする．ただし，α は $0<\alpha<1$ を満たす定数とする．$(n+m)$ 回目の試行を終えた時点で赤玉が n 個，白玉が m 個出ている確率を $P_{n,m}$ とする．次の問いに答えよ.

問 1　$P_{2,2}$ を α の式で表せ.

問 2　$P_{n,1}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を α と n の式で表せ.

問 3　$P_{4,1}$ の値が最大となる α を求めよ.

（余　　白）

第　2　問（50点）

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n = \frac{5^{2^{n-1}} - 1}{2^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

により定める．ただし，$5^{2^{n-1}}$ は 5 の 2^{n-1} 乗を表す．次の問いに答えよ．

問1　a_1, a_2, a_3 を求めよ．

問2　すべての自然数 n について b_n は整数であることを示せ．

問3　すべての自然数 n について a_n は整数であることを示せ．

問4　すべての自然数 n について a_n は奇数であることを示せ．

（余　　　白）

第　3　問（50点）

座標平面上の直線

$$\ell_1 : y = \sqrt{3}\,x, \qquad \ell_2 : y = -\sqrt{3}\,x, \qquad \ell_3 : y = 0$$

を考える．点 $\mathrm{P}_0(\cos t_0, \sin t_0)$ $\left(0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ に対して，ℓ_1，原点，ℓ_2，原点，ℓ_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_1 から P_6 を定める．つまり，P_0 と ℓ_1 に関して対称な点が P_1 であり，P_1 と原点に関して対称な点が P_2 であり，以下，同様に $\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6$ を定める．また，P_6 から始めて，再び ℓ_1，原点，ℓ_2，原点，ℓ_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_7 から P_{12} を定める．つまり，P_6 と ℓ_1 に関して対称な点が P_7 であり，P_7 と原点に関して対称な点が P_8 であり，以下，同様に $\mathrm{P}_9, \mathrm{P}_{10}, \mathrm{P}_{11}, \mathrm{P}_{12}$ を定める．さらに，t_i $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, 12)$ を P_i の座標が $(\cos t_i, \sin t_i)$ $(0 \leqq t_i < 2\pi)$ となる実数とする．次の問いに答えよ．

問 1　$t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，t_1 と t_2 を求めよ．

問 2　t_6 を t_0 の式で表し，P_6 は不等式 $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}\,x$ の表す領域の点であることを示せ．

問 3　$\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_{12}$ を示せ．

（余　　白）

第　4　問（50点）

座標平面上で，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,3)$ を結ぶ線分 OA を考える．与えられた点 P に対し，P と線分 OA の距離を $d(\mathrm{P})$ とおく．すなわち $d(\mathrm{P})$ は，点 Q が線分 OA 上を動くときの線分 PQ の長さの最小値である．次の問いに答えよ．

問１　点 P の座標が $(5,2)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ の値を求めよ．

問２　点 P の座標が (a,b) のとき，$d(\mathrm{P})$ を a,b の式で表せ．

問３　放物線 $y=x^2$ 上にあり，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標をすべて求めよ．