前 期 日 程

2023 年度

数　学　問　題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと.

2　問題冊子は全部で 8 ページ，解答用紙は全部で 4 枚である．脱落のあった場合には申し出ること.

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右 2 箇所），氏名を必ず記入すること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること.

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること.

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある.

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない.

7　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい.

8　問題冊子は持ち帰ること.

（余　　白）

第　1　問　(50点)

A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる．2 人はじゃんけんをして，下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う．

- A は勝ったら 1 段のぼり，あいこか負けた場合，同じ段にとどまる．
- B はグー，チョキで勝ったら 1 段のぼり，パーで勝ったら 3 段のぼる．また，あいこか，グー，チョキで負けた場合，同じ段にとどまる．パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る (すでに一番下の段にいる場合はとどまる)．

A, B ともに，$\dfrac{1}{3}$ ずつの確率でグー，チョキ，パーを出すものとし，すべての試行は独立とする．2 回目以降のゲームは，2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする．階段の一番下の段を 0 段目とし，そこから m 段のぼった段を m 段目とする．次の問いに答えよ．

問 1　n は自然数とし，m は $0 \leqq m \leqq n$ である整数とする．n 回のゲームを終えた結果，A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ を求めよ．

問 2　m は 0 以上の整数とする．2 回のゲームを終えた結果，B が m 段目にいる確率 y_m を求めよ．

問 3　n は自然数とする．n 回のゲームを終えた結果，B が 0 段目にいる確率 z_n を求めよ．

（余　　白）

第　2　問（50点）

i は虚数単位を表すものとする．複素数 z に関する方程式

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}$$

の表す複素数平面上の図形を ℓ とする．次の問いに答えよ．

問 1　ℓ は直線であることを証明せよ．

問 2　直線 ℓ に関して複素数 w と対称な点を w の式で表せ．

問 3　複素数 z に対して，z を点 1 を中心に反時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし，次に z_1 を原点を中心に反時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2 とする．さらに，直線 ℓ に関して z_2 と対称な点を $f(z)$ とする．$f(z)$ を z の式で表せ．

問 4　$f(z)$ は問 3 のとおりとする．複素数 z に関する方程式

$$f(z) = -z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の表す複素数平面上の図形を図示せよ．

（余　　　白）

第　3　問 （50点）

次の問いに答えよ．

問１　$a,\ b$ は実数とし，$f(x)$ は $a,\ b$ が属する開区間で定義された関数とする．$f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，次の等式を証明せよ．

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx = (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\int_a^b f(x)\,dx$$

問２　t を正の実数とする．次の不等式を証明せよ．

$$0 \leqq \int_t^{t+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}(\log t + \log(t+1)) \leqq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)$$

問３　次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ．

$$a_n = \log(n!) - n\log n + n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

（余　　白）

第　4　問 （50点）

p は素数とする．次の問いに答えよ．

問 1　j を $0 < j < p$ である整数とすると，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_j$ は p で割り切れることを示せ．

問 2　自然数 m に対して $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れることを示せ．

問 3　自然数 m に対して $m^p - m$ は p で割り切れることを示せ．さらに m が p で割り切れないときには，$m^{p-1} - 1$ が p で割り切れることを示せ．

ここで，次の集合 S を考える．

$$S = \{4n^2 + 4n - 1 \mid n \text{ は自然数}\}$$

例えば，$n = 22$ とすると $4n^2 + 4n - 1 = 2023$ なので 2023 は S に属する．次の問いに答えよ．

問 4　整数 a が S に属し，$a = 4n^2 + 4n - 1$（n は自然数）と表されているとする．このとき，a と $2n+1$ は互いに素であることを示せ．

問 5　p は 3 以上の素数とする．p が S に属するある整数 a を割り切るならば，$2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れることを示せ．