

2024年度

数 学 問 題

現代システム科学域〔環境社会システム学類（理・数型）、心理学類（理・数型）、
学域募集（理・数型）〕・経済学部・商学部・看護学部・生活科学部

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページ、解答用紙は全部で4枚である。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙の各ページ所定欄に、それぞれ受験番号（最後のページは、左右2箇所）、氏名を必ず記入すること。なお、解答用紙は上部で接着してあるので、はがさず解答すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答以外のことを書いたときは、該当箇所の解答を無効とすることがある。
- 6 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが、採点はしない。
- 7 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
- 8 問題冊子は持ち帰ること。

(余 白)

第 1 問 (50点)

a を正の実数とする. 二つの x の関数 $y = 2x^2 - 3x + 1 + (x - 2)|x - 1|$ と $y = ax - a$ のグラフで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする. 次の問いに答えよ.

問1 関数 $y = 2x^2 - 3x + 1 + (x - 2)|x - 1|$ のグラフをかけ.

問2 $S(a)$ を a を用いて表せ.

問3 a がすべての正の実数を動くとき, $S(a)$ の最小値を求めよ.

(余 白)

第 2 問 (50点)

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える.

$$\begin{cases} 5p^2 + 2p = q^2 + 5q \\ q = ap \\ pq \neq 0 \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

問1 $a = 2$ のとき, p と q を求めよ.

問2 $a \neq \pm\sqrt{5}$ のとき, p と q をそれぞれ a を用いて表せ.

問3 a は有理数で, $a = \frac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする. ただし, k は自然数, m は整数とする.

1. $5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数ならば, p と q はともに整数であることを証明せよ.
2. 逆に, p と q がともに整数ならば, $5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ.

(余 白)

第 3 問 (50点)

1枚のカードに数が1つ書かれた数枚のカードからなる1セットをよくかき混ぜ、上下に重ねて束にする。この束から、AとBの2人がAから始めて交互に、カードを上から順に1枚ずつ取り出し、次の原則にしたがってAとBがカードを保有するものとする。

[原則] カードを取り出した人がそのカードを保有する。

(ケース1) 1, 2, 3, 4, 5の数がそれぞれ1つずつ書かれた5枚のカードからなる1セットを用いて、原則にしたがってカードが無くなるまでカードを取り出し、保有する。

(ケース2) 0, 1, 2, 3, 4, 5の数がそれぞれ1つずつ書かれた6枚のカードからなる1セットを用いる。そして数0が書かれたカードが取り出されるまでは原則にしたがってカードを保有し、数0が書かれたカードが取り出されて保有された時、AとBはその時点で保有しているカードを全て交換し、その後も原則にしたがってカードが無くなるまでカードを取り出し、保有する。

ケース1とケース2において、カードをすべて取り出した時にAとBがそれぞれ保有しているカードに書かれた数の合計をそれぞれの合計点、最大の数をそれぞれの最高点と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

問1 ケース1でAの最高点が5である確率を求めよ。

問2 ケース1でAの合計点がBの合計点より大きくなる確率を求めよ。

問3 ケース2でAの最高点が5である確率を求めよ。

問4 ケース2でAの合計点がBの合計点より大きくなる確率を求めよ。

(余 白)

第 4 問 (50点)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ を満たす実数 θ に対して, xyz 空間内の点 P と Q を

$$P \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2} \right), Q \left(2 \cos \theta + \sin \theta, 2 \sin \theta - \cos \theta, \frac{3}{2} \right)$$

と定め,

条件 (A) 直線 PQ と zx 平面が 1 つの点だけで交わる

を考える. 次の問いに答えよ.

問1 条件 (A) が成り立つような θ の範囲を求めよ.

問2 条件 (A) が成り立つものとし, その交点を $R(p, 0, q)$ とする.

1. p と q をそれぞれ θ の式で表せ.
2. $p^2 - 2q^2$ は θ によらない定数であることを示せ.