公立大学中期日程

2025年度

<工　学　部>

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で11ページ，解答用紙は全部で３枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　すべての解答用紙の所定欄に，それぞれ受験番号（左右２箇所），氏名を必ず記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　解答終了後，配付された解答用紙はすべて提出すること．

8　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

9　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問 （50点）

（ 第 1 問 の問 1 については解のみを記入すること.）

a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする．$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，2 つの曲線 $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \dfrac{\tan x}{a}$ および y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．以下の問いに答えよ.

問 1　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

問 2　$S(a)$ を a を用いて表せ.

問 3　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{S(a)}{a}$ を求めよ.

（余　　白）

第　2　問 （40点）

（ **第 2 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること.）

空間内の点 O を中心とする半径 1 の球面を S とする． S 上の異なる 3 点 A, B, C を含む平面を α とし，S と α が交わってできる円の中心を D とする．直線 AD と S の交点のうち， A と異なる点を E とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 3(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}})$$

が成り立つとする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ とおく．以下の問いに答えよ.

問 1　　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

問 2　　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

問 3　　内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を k を用いて表せ.

問 4　　$\cos\angle\mathrm{AOE}$ を k を用いて表せ.

（余　　白）

第　3　問（50点）

（ **第 3 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること．）

i は虚数単位とする．複素数 z について，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表すものとする．以下の問いに答えよ．

問 1　$z = 4 + 3i$ のとき，$(\overline{z} + 5i)(z - 3 - i)$ の値を求めよ．

問 2　$(\overline{z} + 5i)(z - 3 - i)$ が純虚数または 0 となる複素数 z 全体の集合は，複素数平面において円となる．この円の中心を表す複素数 α と半径 r を求めよ．

問 3　$(\overline{z} + 5i)(z - 3 - i)$ が純虚数または 0 となる複素数 z の絶対値 $|z|$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，それらを与える z の値は求めなくてよい．

問 4　t は実数とする．$(\overline{z} + 5i)(z - 3 - i) = t$ を満たす複素数 z が存在する t の範囲を求めよ．

（余　　白）

第　4　問（40点）

（ **第 4 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること.）

自然数 n に対し，時刻 0 から n 秒後を時刻 n と定める．正四面体の頂点 A, B, C, D を 1 秒ごとに移動する点 P を考える．点 P の時刻 0 での位置は頂点 A であり，時刻 $n-1$ から時刻 n になったとき，点 P の位置は次の規則に従って決まるものとする.

［規則］

- 位置を変えず同じ頂点にいる確率は p である.
- 位置を変えて他のそれぞれの頂点に移動する確率はどれも $\dfrac{1-p}{3}$ である.

ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数である．例えば，時刻 1 に点 P の位置が頂点 A である確率は p で，頂点 B, C, D である確率はそれぞれ $\dfrac{1-p}{3}$ となる．時刻 n に点 P の位置が頂点 A である確率を a_n とする．以下の問いに答えよ.

問 1　　$p=\dfrac{1}{5}$ のとき，a_3 の値を求めよ.

問 2　　a_{n+1} を a_n と p を用いて表せ.

問 3　　a_n を n と p を用いて表せ.

問 4　　点 Q は時刻 0 での位置が頂点 B であり，点 P と同様に［規則］に従って頂点 A, B, C, D を 1 秒ごとに移動する．点 P と点 Q の位置の決め方は互いに影響を受けず，2 点の位置が同じである場合もあるとする．時刻 n に点 P の位置と点 Q の位置が同じである確率を x_n とし，$b_n=\dfrac{1-a_n}{3}$ とおく．x_n を b_n を用いて表せ.

（余　　白）

第　5　問（60点）

（ **第 5 問** の問 1，問 2，問 3，問 4，問 5 については解のみを記入すること.）

e は自然対数の底とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{d}{dx}\log\frac{e^x+1}{\sqrt[4]{2e^{2x}+1}}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

問 1　$f(0)$ および $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

問 2　$X=e^{-x}$ とおく．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を X の分数式で表せ．

問 3　$f'(x)=0$ を満たす x をすべて求めよ．

問 4　$f(x)$ の極大値を求めよ．

問 5　x に関する方程式 $f(x)=k$ がただ 1 つの実数解をもつような実数 k の範囲を求めよ．

（余　　白）