前 期 日 程

2025 年度

数　学　問　題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で 8 ページ，解答用紙は全部で 4 枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右 2 箇所），氏名を必ず記入すること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

8　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問 （50点）

数列 $\{I_k\}$ を

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\cos x - k\sin 2x|\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．ただし a は $0 < a < 2$ を満たす実数である．次の問いに答えよ．

問１　I_k を，積分を用いない a と k のみの式で表せ．

問２　2 以上の整数 n に対し，3 つの数

$$\log n, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

の大小を比較せよ．ただし log は自然対数である．

問３　b を実数とする．

$$J_n = \frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=1}^{n} I_k + bn^2\right) \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

によって定まる数列 $\{J_n\}$ が収束するとき，a と b を求めよ．また，そのときの極限値 $\lim_{n\to\infty} J_n$ を求めよ．ただし $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log n} = \infty$ が成り立つことは用いてよい．

（余　　白）

第　2　問　（50点）

座標空間において4点 A$(1, 1, 0)$，B$(1, 0, 2)$，C$(1, 4, 2)$，D$(-1, 1, 0)$ を考える．次の問いに答えよ．

問1　3点 A，B，C を含む平面において，点Bを通り直線ACに垂直な直線を ℓ，点Cを通り直線ABに垂直な直線を m として，ℓ と m の交点をEとする．点Eの座標を求めよ．

問2　$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し，線分ABを $t : (1-t)$ に内分する点をP，線分ACを $t : (1-t)$ に内分する点をQ，線分CDを $(1-t) : t$ に内分する点をR，線分BDを $(1-t) : t$ に内分する点をSとする．4点 P，Q，R，S は同一平面上にあることを示せ．

問3　4点 P，Q，R，S を含む平面を α とする．平面 α による四面体ABCDの切り口の面積を t の式で表せ．

問4　平面 α に平行な平面のうちで点Eを通るものを β とすると，四面体ABCDは平面 β によって2つの部分に分けられる．それらのうちで辺BCを含む方の図形の体積を求めよ．

（余　　白）

第　3　問（50点）

自然数 N の正の約数の個数を n とする．N の正の約数を，小さい順に d_1，d_2，$\cdots\cdots$，d_{n-1}，d_n と表す．したがって

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots\cdots < d_{n-1} < d_n = N$$

である．いま，$n \geqq 5$ かつ

$$(d_3 - d_2)(d_4 - d_2)(d_5 + d_2) = (2d_2)^3$$

が満たされているとする．次の問いに答えよ．

問 1　　$2 < a < b < c$ かつ $(a-2)(b-2)(c+2) = 2^6$ を満たす整数 a，b，c の組をすべて求めよ．

問 2　　$d_2 \neq 2$ であることを示せ．

問 3　　$d_2 = 3$ であることを示せ．

問 4　　d_3，d_4，d_5 を求めよ．

（余　　白）

第　4　問 （50点）

xy 平面において 3 点 O$(0,0)$，P$(1,0)$，Q$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ を考える．ただし α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数である．また，$f(\theta) = 2\cos\theta - 1$ とおく．次の問いに答えよ．

問 1　　点 O と直線 PQ の距離を α の式で表せ．

問 2　　次の等式を示せ．

$$f(\theta)\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta - \alpha}{2}$$

問 3　　媒介変数 t を用いて

$$x = f(t)\cos t, \quad y = f(t)\sin t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{3}\right)$$

と表される曲線を C とする．曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有することを示せ．また，その共有点を R とするとき，$\angle$POR を α の式で表せ．