

出題の意図

不定係数を含む次元解析による解答の推測や、複数の解答が考えられる実験手法の検討など、通常の入試では出題されにくい内容もあえて含めることで、総合的な学力を問う問題とすることを意図した。

また、大学における物理学の学習では、重要な数学的手法である微分積分を十分に習熟することが不可欠である。本問題は、その習熟度を適切に測ることのできる問題構成を目指して作成した。

受験番号		氏名	
------	--	----	--

小論文：第1問

問1

(1) 周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

(2) $x = x_0 \cos \frac{2\pi}{T}t$ のグラフ。ただし、 $x \leq 0$ で小球は停止する。

(3) 衝突前後の運動量保存と跳ね返り係数の定義を用いる。小球1, 2の衝突後の速度は $V \mp \frac{1}{2}ev$ と表される。

(4) 衝突前の運動エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(2m)V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2$$

である。衝突後の運動エネルギーは前問の結果を用いて、

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m\left(V - \frac{1}{2}ev\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(V + \frac{1}{2}ev\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2m)V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)e^2v^2 \end{aligned}$$

よって衝突前後のエネルギー変化は $\frac{m}{4}(e^2 - 1)v^2$ となる。

(5) 衝突を繰り返すと、相対運動の運動エネルギーのみが失われる。小球1, 2は結合し、周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ の単振動を続ける。振幅はエネルギー保存則 $\frac{1}{2}(2m)V^2 = \frac{1}{2}kA^2$ より、 $A = V\sqrt{\frac{2m}{k}}$ と与えられる。

問2

(1) 十分時間が経った時、加速度は0となる。その時の鉛直方向の速さ v_f は $0 = mg - \beta v_f$ から得られる。水平方向の速さは0となっていることから、質点は一定の速さ $\frac{m}{\beta}g$ で鉛直下方向に落下する。

(2) 与えられた物理量から長さの次元を持つ物理量を構成すると、 $\frac{m}{\beta}v_0$ となる。

(3) 最大到達距離は水平方向の初速度、質量に比例し、 β に反比例する。よって小球が壁に到達するための条件は $C\frac{m}{\beta}v_0 \cos \theta \geq L$ となる。(結局 $C = 1$ であることが微分方程式を解くことで示される)

受験番号		氏名	
------	--	----	--

小論文：第2問

(1)

偏向板内でのy軸方向の電子の運動方程式は、y軸方向の加速度を a_y とすると、

$$ma_y = eE$$

よって電子のy軸方向の加速度は $a_y = \frac{eE}{m}$

偏向板を出るまでの時間は $t_1 = l/v_0$ なので、y軸

方向の速度は $v_y = a_y t_1 = \frac{eEl}{mv_0}$

偏向板を出るときの変位を d_1 とすると

$$d_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{eEl^2}{2mv_0^2}$$

偏向板を出てから蛍光板までの時間は $t_2 = L/v_0$ なので、その時間の変位 d_2 は

$$d_2 = v_y t_2 = \frac{eEL}{mv_0^2}$$

よって点Oから点Pまでの変位は、

$$d = d_1 + d_2 = \frac{eEl(l + 2L)}{2mv_0^2}$$

上式を変形して、

$$\frac{e}{m} = \frac{2v_0^2 d}{El(l + 2L)}$$

(2)

磁界の方向は紙面の手前から奥へ向かう方向、つまり \otimes が正解

電界内を直進する場合は力のつりあいより

$$eE = ev_0 B$$

となり、

$$v_0 = \frac{E}{B}$$

問1に代入して

$$\frac{e}{m} = \frac{2Ed}{B^2 l(l + 2L)}$$

(3)

陽子の電荷が正であることから、電界および磁界で曲げられる方向が逆になる。電子に比べて陽子は質量が約1840倍重く曲げられにくいため、点Pと点Oの差が確認できないほど小さくなってしまふ。より精度よく測定するためには、電界および磁界を強く(約1840倍)し、目視で確認できる程度に陽子を電界で曲げる必要がある。

受験番号		氏名	
------	--	----	--

小論文：第3問

(1)

正の向きに伝播する場合の波の式は、

$$y = A \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$$

(2)

光1の波の式は、 $y_1 = \frac{A}{2} \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$

光2の波の式は、 $y_2 = \frac{A}{2} \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$

検出器上での合成波の式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} = \frac{A}{4} \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{S + 2L_1 + x'}{\lambda} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{A}{4} \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{S + 2L_2 + x'}{\lambda} \right) \right\} \\ &= \frac{A}{4} 2 \sin \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{S + 2L_1 + x'}{\lambda} + ft - \frac{S + 2L_2 + x'}{\lambda} \right) \right\} \\ &\quad \times \cos \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{S + 2L_1 + x'}{\lambda} - \left(ft - \frac{S + 2L_2 + x'}{\lambda} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{A}{2} \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{L_1 - L_2}{\lambda} \right) \right\} \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{S + L_1 + L_2 + x'}{\lambda} \right) \right\} \end{aligned}$$

よって、合成波の振幅は

$$\frac{A}{2} \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{L_1 - L_2}{\lambda} \right) \right\} \text{ である。}$$

(3)

前問の解答より、 $y = \pm \frac{A}{2}$ のとき、合成波の振幅が

最大となるので、 $\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{L_2 - L_1}{\lambda} \right) \right\} = \pm 1$

のとき、最も明るくなる。ここから

$2\pi \left(\frac{L_2 - L_1}{\lambda} \right) = m\pi$ または、 $2 \left(\frac{L_2 - L_1}{\lambda} \right) = m$ 、または、

$$2(L_2 - L_1) = m\lambda$$

(4)

(例1)

ガラスを光軸に対して垂直に置いて、可動鏡を動かす、光路差を変えることによる検出器での干渉強度の変化を観測することで、屈折率を求めることができる。

そこで、ガラスを挿入することによって生じる光路差を求める。光1の往復の経路長 x_1 は、 $x_1 = 2(L_1 - d + nd)$ 、光2の往復の経路長は $x_2 = 2L_2$ なので、光路差は

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2(L_1 - d + nd) - 2L_2$$

この光路差が $m\lambda$ (波長の整数倍になった時) になるとき、干渉は明るくなるので、

$$2(L_1 - d + nd) - 2L_2 = m\lambda$$

$$L_1 - d + nd - L_2 = m \frac{\lambda}{2}$$

を得る。上の式を変形することで、屈折率に関する式が得られる。

$$n = 1 + \left(m \frac{\lambda}{2} + L_2 - L_1 \right) / d$$

L_1 および次数 m がわかれば、屈折率 n を求めることができる。

通常、 L_2 は実測から求めることが可能であるが、次数 m を求めることは困難である。

そこで、 L_2 を ΔL だけ動かすことで、次数 m が Δm に変化するとすれば、

$$n = 1 + \left(\Delta m \frac{\lambda}{2} + \Delta L + L_2 - L_1 \right) / d$$

となり、 $L_2 = L_1$ に設定すれば、上式は

$$n = 1 + \left(\Delta m \frac{\lambda}{2} + \Delta L \right) / d$$

可動鏡の移動距離 ΔL と次数の変化量 Δm を入れることで、屈折率を求めることができる。または、

$$\Delta m = -\frac{2}{\lambda} \Delta L + \frac{2}{\lambda} d(n - 1)$$

移動距離 ΔL に対する Δm をプロットすることで、屈折率 n を求めることができる。

(例 2)

ガラスを光軸に対して斜めに置いて、可動鏡を動かさず、ガラスへの光の入射角を変え、光路差を変えることによる検出器での干渉強度の変化を観測することで、屈折率を求めることができる。

右図に示すように、入射角を θ 、屈折角を ϕ とし、ガラスへの入射点を P_1 、ガラスからの出射点を P_2 とする。また、出射点 P_2 からガラスがない時の光軸である点線に垂線をおろした点を Q_2 とし、点線とガラスとの交点を Q_3 とする。ガラスがある時とない時の光路差 Δx は、下記のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta x &= 2(n\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} - \overline{P_1Q_3}) \\ &= 2\left(\frac{nd}{\cos\phi} + d(\tan\theta - \tan\phi)\sin\theta - \frac{d}{\cos\theta}\right) \\ &= 2d\left(\frac{n}{\cos\phi} - \tan\phi\sin\theta - \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}\right) \\ &= 2d\left(\frac{n}{\cos\phi} - \tan\phi\sin\theta - \cos\theta\right) \\ \Delta x &= 2d\left(\frac{n}{\cos\phi} - \tan\phi\sin\theta - \cos\theta\right)\end{aligned}$$

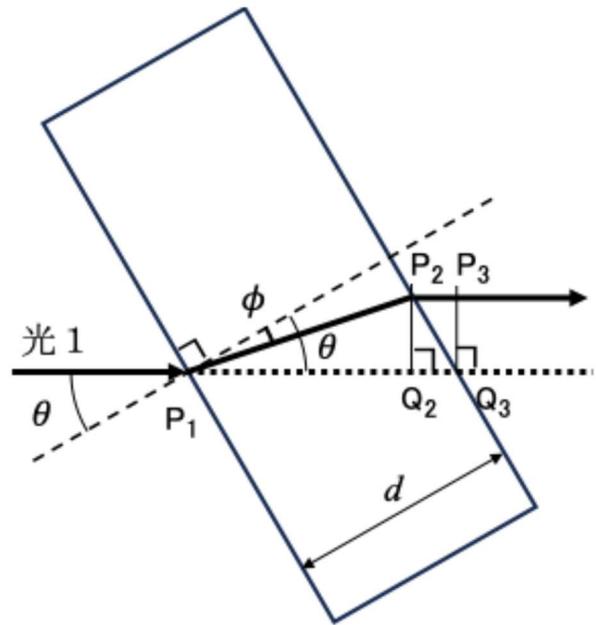
この光路差 Δx が $m\lambda$ （波長の整数倍になった時）になるとき、干渉は明るくなるので、

$$\begin{aligned}\Delta x = m\lambda &= 2d\left(\frac{n}{\cos\phi} - \tan\phi\sin\theta - \cos\theta\right) \\ m &= \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{n}{\cos\phi} - \tan\phi\sin\theta - \cos\theta\right)\end{aligned}$$

また、 $\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = n$,

$$\cos\phi = (1 - \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \left(\frac{\sin\theta}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

を用いて、上式を変形することで、入射角 θ に対する干渉の次数の変化を求めることができる。



受験番号		氏名	
------	--	----	--

小論文：第4問

問1

(1)

Cube roots (ちなみにポルトガル語では *Raizes cúbicas* であり、*Raios cubicos* はファインマン氏による造語であろう)

(2)

3乗根を計算することになった数 1729.03 が 3乗数 $12^3 = 1728$ に非常に近くて、近似公式を用いて精度よく計算できるため。

(3)

$$1729.03^{\frac{1}{3}} = 12 \times \left(1 + \frac{1.03}{12^3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 12 + \frac{1.03}{432} = 12.002 \dots$$

と同様に、

$$1330^{\frac{1}{3}} = 11 \times \left(1 - \frac{1}{11^3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 11 - \frac{1}{363} = 10.997 \dots$$

が得られる。

(4)

$f(x) = (1+x)^\alpha$ とすれば、 $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ なので、関数 $y = f(x)$ を、 $x=0$ における接線 $y \approx f(0) + f'(0)x = 1 + \alpha x$ で近似すれば、与えられた近似公式が得られる。

(5)

ソロバンを用いた計算において、操作の習熟でできる単純計算なら早いですが、数字を知らないのも、近似理論などの数学の理解において必ずしも有利ではない。

問2

(1)

When we multiply two negative numbers, the result is positive. This can be explained in several ways. First, we can look at patterns in multiplication. For example, consider what happens when we multiply a negative number by positive numbers, which can be computed by repeated addition, such as $(-3) \times 2 = (-3) + (-3) = -6$,

$$\dots, (-3) \times 2 = -6, (-3) \times 1 = -3, (-3) \times 0 = 0.$$

We can see that as the second number decreases by one, the result increases by 3 each time. Continuing this pattern, we find

$$(-3) \times (-1) = 3, (-3) \times (-2) = 6, \dots$$

To keep the pattern consistent, the answer must be positive.

Second, we can use the distributive property, $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$. Since $0 = (-3) \times 0 = (-3) \times (-2 + 2) = (-3) \times (-2) + (-3) \times 2$, we have $0 = (-3) \times (-2) - 6$, which means $(-3) \times (-2) = 6$.

Finally, we can explain visually by using a number line. Multiplying by a negative number means “turning around” (reversing direction) and take steps of that size. Therefore, multiplying two negative numbers involves turning around twice – which brings us back to facing the original direction – resulting in a positive result.

(2)

Let us locate the ball at the origin of the three-dimensional Cartesian coordinates (x, y, z) , where the equation for the sphere is given by $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. The intersection with the plane of $z = z_0$ is given by $x^2 + y^2 + z_0^2 = r^2 - z_0^2$ with the cross-section of $\pi(r^2 - z_0^2)$. After integrating the area from $-r$ to r , we find that the volume is given by
$$\text{Volume} = \int_{-r}^r dz \pi(r^2 - z_0^2) = 2 \int_0^r dz \pi(r^2 - z_0^2) = 2\pi r^3 - 2\pi r^3/3 = 4\pi r^3/3.$$

Alternatively, we can explain it using Cavalieri's principle stating that, if every plane intersects two objects in cross-sections of equal area, then the two objects have equal volumes. Namely, we separate the cross-section $\pi(r^2 - z_0^2)$ into the difference of two cross-sections. Then, the first one πr^2 denotes the area of a circle of radius r while the second one πz_0^2 denotes that of a circle of radius z_0 . Now let us combine all the planes with different $z = z_0$. The first object is a cylinder of base area πr^2 and height $2r$, which gives the volume of $2\pi r^3$. The second object is a combination of two cones of base area πr^2 and height r , which gives the volume $1/3 \times \pi r^2 \times r \times 2 = 2\pi r^3/3$. After subtraction, we find that the volume of the ball is $2\pi r^3 - 2\pi r^3/3 = 4\pi r^3/3$.