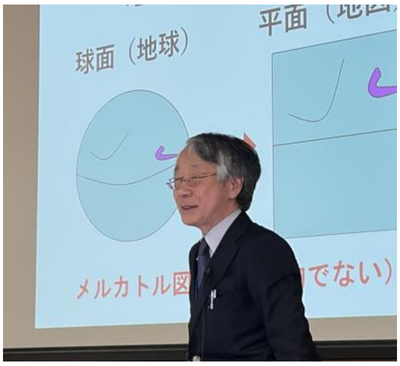
2022.12.15 開催
第 8 回 ACADEMIC CAFE
「空間を「測る」／古墳を「測る」－ 幾何学(者)と考古学(者)が追い求める「美しさ」」

曲がった面を“測る”ことから始まる幾何学 -「多様体」の数学 -

理学研究科　教授　大仁田　義裕

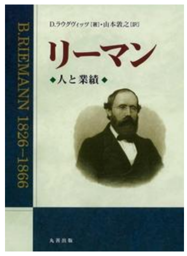
概要　私の専門の微分幾何学では，私たちの身の周りの様々なものの形を表す曲線や曲面から，n次元や無限次元の「多様体」に亘り，その性質やしくみを“測る”ことを研究します．幾何学（geo-metry）と地理学（geo-graphy）は同根であるは名言です．まず地図の話から，ガウスは曲面の内的な「曲率」を発見（驚異の定理 1827 年），「ガウスの曲率」をリーマン(1854 年）は n 次元の空間「多様体」へ拡張した話へと進みます．曲面のもう一つの曲率は「平均曲率」で，石鹸膜やシャボン玉などの形状に関係します．古典から現代へ，このような数学の世界の一端をご紹介します．
キーワード　幾何学，地図，多様体，ガウス曲率，極小曲面，平均曲率一定曲面，可積分系，可視化．



会場の様子

1. はじめに

本学研究推進課によります大変素晴らしい企画「アカデミックカフェ」にお声をかけていただき大変光栄に感じております．今回のアカデミックカフェのテーマは「測る」であると伺い，私の講演タイトルは，「曲がった面を測ることから始まる幾何学」副題「多様体の数学」とさせていただきました．2013 年から河内明夫先生ご定年のあと，微力ながら本学数学研究所所長を務めております．この 3 月で私も定年ですが，まだまだ頑張ります．2003 年 21COE 採択を契機に設置された数学研究所は，2019 年度から文科省共同利用・共同研究拠点認定，2022 年度大学統合により大阪公立大学数学研究所として，数学の三本柱である「代数学」「幾何学」「解析学」が，「数理物理」や「宇宙物理」と密接に協働・共創し，「応用数学」や「数学・数理科学連携」も展開しています．大学院学生を含めた学内外・国内外研究者の方々が本拠点を活用して日々研究活動・研究交流を行って素晴らしい成果を挙げています．
私の研究分野は，「幾何学」ですが，現代の「幾何学」分野は，大まかに，「トポロジー」と「微分幾何学」から成ります．私自身は「微分幾何学」の研究者です．微分幾何学は，先ほど挙げたようないろいろな分野と関わるところが大きな魅力ですが，その原点はガウス（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）とリーマン（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866）です．



「微分幾何学」という学問分野は，ガウスとリーマンに始まりますが，我々の身の周りにあるいろいろな曲線や曲面から見てみましょう．

2. 身の周りの曲線・曲面から

まず，私は学生とよく野球のキャッチボールをして，肩の強い学生と遠投などやると，ボールがきれいな軌道を描いて空を走るのでとても気持ちよいですが，これは放物線という２次曲線のグラフで書ける曲線です．放物線を描くものは他にもあって，噴水もそうです．富士山の稜線は美しいですが，指数関数のグラフを思わせます．ネックレスの形は，懸垂線と呼ばれる，双曲線関数，ハイパボリックコサイン関数coshで表される曲線で

す．両端を固定したとき，位置エネルギーを最小化する曲線です．ケプラーの第一法則に従って太陽系の惑星は，太陽を一つの焦点とする楕円の軌道を描きます．とくにその軌道は平面曲線です．石鹸膜やシャボン玉・石鹸泡もまた，数学的に大変興味深い曲面です．ここでは，数学において，いろいろな曲面の世界を幾何学的な構造に注目してお話しします．

3.　「地図」から「多様体」へ

「幾何学（geo-metry）」と「地理学（geo-graphy）は，同根である」私はこの言葉が好きです ([2]).

私は，数学科の「多様体」の講義では，「地図 (Map)」の話からよく始めます．地球の地図を考えましょう．いろいろな図法があるようですが，メルカトル図法は私たちに身近ですね．数学の“曲面”を使って，地球を**球面**，地図を**平面**で表しましょう．このとき最大の困難な点は，球面は曲がっていて平面は全然曲がっていないということです．そのために，メルカトル図法では，一般に曲線の長さが保たれません．このようなとき，**等長的でない**と言います．しかし，メルカトル図法では，角度は保たれます．このようなとき**等角的である**と言います．では，メルカトル図法の地図はどのようにできているかを見ましょう．

まず，地図を丸めて円筒を作るように，平面を丸めて円柱面が出来ます．次に，球面を円柱の中に入れた状態を考えます．球面の北極点と南極点以外の点 (x, y, z) を，球面の中心からの半直線で結んで円柱面と交わる点$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, z)$を対応させることによって「地図」が出来ますが，これは等長的でないどころか，等角的でもありません．そこで，対応する点を $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}x, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}y, \tanh^{-1}z\right)$ に補正すると，等長的ではないですが，等角的な地図になります (参照 [3])．これが**メルカトル図法**です．これを“**複素数**”の数学の世界から見てみましょう．

全ての実数は，目盛りを打った直線上の点で表せます．そのような直線を**実直線**と呼ばれ，記号 $\mathbf{R}$ で表します．座標平面の点 (u, v) を複素数 $u + \sqrt{-1}v$ とみなして全ての複素数を表すことができます．実数の世界は直線，複素数の世界は平面で表されるわけです．このように複素数の世界を表す平面は，**ガウス平面**あるいは**複素平面**と呼ばれ，記号 $\mathbf{C}$ で表します．代数方程式は実数の世界には解はないことがありますが，複素数の世界では必ず解があることが保証されています．ガウスの**代数学の基本定理**です．

また，球面の北極点から球面上の北極点以外の点を通る半直線を延ばしてxy-平面と交わる点を対応させ，北極点は xy-平面の無限遠点 ∞ に対応すると考えることによって，球面はガウス平面に無限遠点 ∞ を付け加えて得られる曲面と考えることが出来ます．このような球面は**リーマン球面**と呼ばれます．

球面はリーマン球面と考えて，ガウス平面は丸めて円柱面と考えて，複素数を使いますと，メルカトール図法は，**複素対数関数**によって，

$$f(z) = \sqrt{-1}\log(z) \quad (z \in \mathbf{C} - \{\mathbf{0}\})$$

とシンプルに書けます．

さらに，より高度に地球を近似する地球楕円体（回転楕円体）の等角的な地図は，やはりガウス–クリューゲル図法として知られており，ヤコビの楕円関数によって記述されます．

実は，微分幾何学では，メルカトル図法を n = 1 次元として，**n次元版メルカトル図法**という大変興味深いものもあります．

4.　曲面の曲率とガウスの驚異の定理

一般に，3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$内の曲面の曲がり具合（曲率！）をどのように測るか，説明します．曲面にパラメータ（座標）u, vを入れて最初に考えたのもガウスです．写像（map）

$$\varphi: D \ni (u, v) \to \varphi(u, v) \in \mathbf{R}^3$$

で与えられた $\mathbf{R}^3$の曲面を考えます．ここで，D は平面 $\mathbf{R}^2$ の領域を表します．このとき，曲面上の曲線の長さは，その曲線に沿って**線素** dsを積分することによって得られます．ここで，ds は，$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ によって定義されます．ここで，E, F, Gは，領域 D 上の関数で，

$$E(u, v) \coloneqq \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle,$$
$$F(u, v) \coloneqq \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle,$$
$$G(u, v) \coloneqq \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

によって定義されます．2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を記号 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ で表します．

曲面の曲率を考える前に，まず，平面の曲線の曲率をどのように考えるか，基本になります．

平面 $\mathbf{R}^2$ の曲線 γ に沿って単位（長さ 1 の）接線ベクトル場 $\boldsymbol{e}(t)$ をとります．曲線 γ が曲がっているほどベクトル $\boldsymbol{e}(t)$ は大きく振れます．曲線 γ に沿ってのベクトル $\boldsymbol{e}(t)$の振れ具合が，曲線 $\gamma = \gamma(t)$ の曲がり具合い（曲率）と考えるのが自然です．平面曲線の場合，さらに符号$\pm$を付けて曲率を定めます．$\boldsymbol{e}(t)$ が左（右）に振れるときは，符

号＋（−）を付けて曲線 γ の曲率 κ を定めます．微分を使って書けば，$\kappa(t) := \pm\|\boldsymbol{e}'(t)\|$ です．

さて，$\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S の点 P における“曲率”を考えましょう．点 P において曲面 S に対して垂直な長さ 1 のベクトル（単位法ベクトル）$\boldsymbol{n}(\mathrm{P})$ をとっておきます．点 P において曲面 S に接する単位ベクトル $\boldsymbol{e}(\mathrm{P})$ を任意に選びます（360 度とり方の自由度があります）．このとき，点 P を通り二つのベクトル $\boldsymbol{e}(\mathrm{P})$ と $\boldsymbol{n}(\mathrm{P})$ で張られる平面 Π による曲面 S の切り口 γ は，平面 Π 上の曲線ですから，平面 Π での曲線 γ の点 P における曲率 $\kappa(\mathrm{P},\boldsymbol{e}(\mathrm{P}))$ が定まります．これは，曲面 S の点 P において単位ベクトル $\boldsymbol{e}(\mathrm{P})$ 方向に（向きも含めて）どのくらい曲がっているかを表す曲率です．単位ベクトル $\boldsymbol{e}(\mathrm{P})$ を 360 度動かしたときの曲率 $\kappa(\mathrm{P},\boldsymbol{e}(\mathrm{P}))$ の最大値と最小値をそれぞれ κ_1, κ_2 で表します．この κ_1，κ_2を使って，曲面 S の点 P における二種類の曲率が次のように定義されます：

$$K(\mathrm{P}) := \kappa_1 \times \kappa_1,$$
$$H(\mathrm{P}) := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

1827 年，ガウスが示したのは次です：

<u>定理</u>（**ガウスの驚異の定理** Theorema egregium [4]）

曲面上の曲線の長さだけから決まる曲率がある．

ガウスの方程式

$$4(EG-F^2)^2K = E\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right)$$
$$+F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}\right.$$
$$\left.+\,4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right) + G\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right)$$
$$-\,2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)$$

そして，リーマン [5]，リッチ - レビ・チビタ[6]，そしてミンコフスキーを経て，アインシュタイン [7] へと大発展（ブレイクスルー）しました．矢野健太郎先生の訳・解説 [8] は分かりやすく感銘を受けます．やはり矢野先生は日本の微分幾何学の神様です．これらの研究論文によって，ガウスの方程式は深化・発展しました．レビ・チビタの論文で，テンソル式が導入されましたが，和の記号 Σ がまだ使われております．現在テンソル計算で普通に使用されている Σ を省略する記法は，アインシュタインがこの論文で初めて考案したものです．このブレイクスルーによって，一般の **n 次元リーマン多様体（Mannigfaltigkeit, manifold）**(M,g) の概念が確立され，ガウスの方程式は，テンソル式を使って，次のように整備されました：

$$g = ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$ 線素=リーマン計量

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ka}\left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\right)$$ レビ−チビタ接続

$$K_{ijk}{}^{h} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{h}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{h}}{\partial x^j} + \Gamma_{ia}^{h}\Gamma_{jk}^{a} - \Gamma_{ja}^{h}\Gamma_{ik}^{a}$$ 曲率テンソル場

$$K_{ijkl} = K_{ijk}{}^{h}g_{lh}$$ リーマン・クリストフェルのテンソル場

$n=2$ のときは，$g_{11}=E$，$g_{12}=g_{21}=F$，$g_{22}=G$ で，$K_{hjk}{}^{h}g^{jk} = 2K$（**2 × ガウス曲率**）です．リーマンの「幾何学の基礎にある仮説について」(1854 年, [5]) に端を発するテンソル解析の黎明・確立の様子は，文献 [9], [10] から学びました．

さて，曲面の曲率の話に戻ります。そのような意味で，曲率 K は，曲面の**内的な曲がり**を表しており，発見したガウスの名をとって，**ガウス曲率**と呼ばれているわけです．一方，**平均曲率** H は，曲面のどのような**外的な曲がり**表わすかは，あとでお話します．

平面は明らかにガウス曲率一定 $K=0$ ですが，平面を丸めて円柱面にする曲面の変形は，等長的なので，ガウスの驚異の定理によって，内的な曲率は変わらず $K=0$ のままです．このような内的な曲率を変えない曲面の変形は，曲面の微分幾何学研究において非常に重要です．半径 $r>0$ の球面では，ガウス曲率

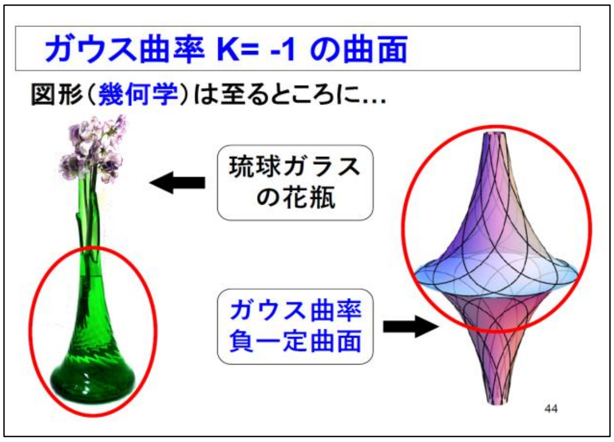
$$K = \frac{1}{r}\times\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}$$

をもち，平均曲率は，

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

です．そこで，もし地球（球面）の等長的な地図（平面）が出来たとすると，ガウスの驚異の定理によって，球面と平面のガウス曲率 K が等しくなければいけないので，矛盾です．したがって，地球の等長的な地図を作ることは不可能です．一方，**「どんな曲面でも局所的には等角的な地図が書ける」**こと，数学的に言い換えると，曲面の各点の十分小さな近傍で，$E=G$ かつ $F=0$となるようなパラメータ表示 $\{u,v\}$（**等温座標系**と呼ばれます）をとることができることも数学者は証明しています（L. Lichtenstein 1916, A. Korn 1919, S.S. Chern 1955, L Bers 1957）．

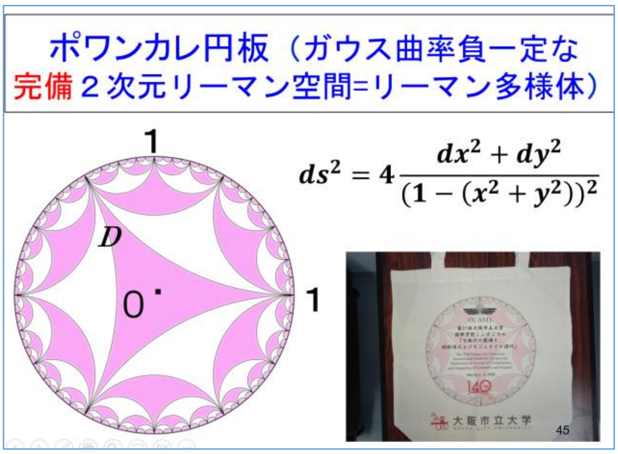
それでは，負のガウス曲率一定 $K<0$ の曲面はどうでしょうか？ われわれの身の回りで琉球ガラスの花瓶の底に近い部分の形状は，次の図の右の曲面の形に似ていますね．



右の曲面は**擬球面**と呼ばれる 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内のガウス曲率負一定の曲面の一つです．擬球面は，途中で切れているように見えますが，空間 $\mathbf{R}^3$ 内のガウス曲率負一定の曲面は，延ばそうと思っても延ばせない端が必ずできてしまいます．これも数学者が証明していることです（ヒルベルトの定理）．しかし 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面ではなく「リーマン多様体」ならば出来ます！座標平面上の半径 1 の開円板 D（境界の単位円は含まれない）に，リーマン計量=線素を，

$$g = ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$$

と定めると，この g から計算されるガウス曲率 $K = -1$ で，この線素に関する測地線（最短線）は，下の図のようになり，開円板 D 内でいくらでも延ばすことが出来ます（この性質を**完備**と言います）．この図案は，第 27 回大阪市立大学国際学術シンポジウム「可視化の数理と，対称性およびモジュライの深化」（参考資料[3]）の配布資料用のバックのデザインとしても好評でした（下図右下）．



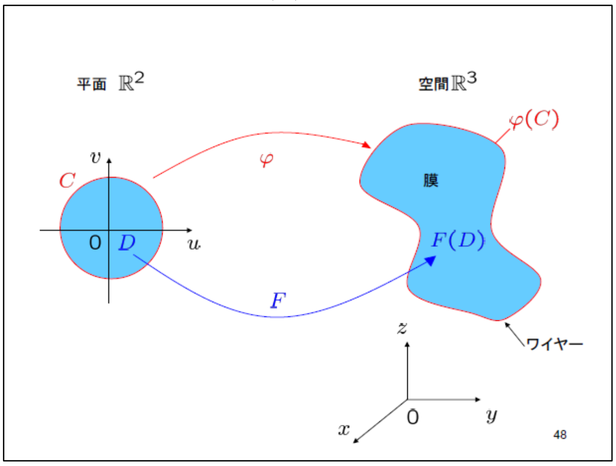
この 2 次元リーマン多様体は，開円板の境界に向かって限りなく拡がっている世界で，**ポワンカレ円板**と呼ばれます．このリーマン多様体は，先ほどのヒルベルトの定理によって 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面として「住む」ことはできないですが，実は 3 次元ミンコウスキー空間 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の曲面として住むことはできることも面白い点です．興味は尽きないですが，次は曲面のもう一つの曲率「平均曲率」の話に行きましょう．

5. 石鹸膜と極小曲面

石鹸膜からもいろいろ面白い数学が出てきます．

【プラトー問題（Plateau's problem 1873 年）】
どんな形の閉じた針金のワイヤーに対しても，それを張る石鹸膜はいつも存在するか？

この問題を数学の言葉に直しましょう．「閉じた針金のワイヤー」は，座標平面の単位閉円板 $D \cup C$ の境界である単位円周 C から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$への写像 $\varphi: C \to \mathbf{R}^3$ で表します．「それを張る膜」は，C 上で φ と一致するような閉円板 $D \cup C$ から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$への写像 $F: \mathrm{D} \cup \mathrm{C} \to \mathbf{R}^3$ の像 $F(D)$ で表します．



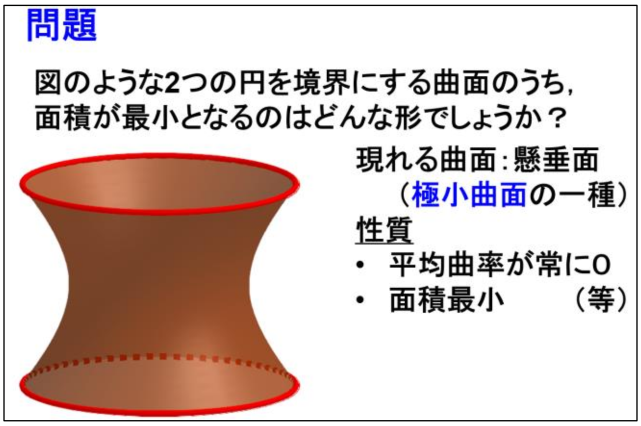
このとき，プラトー問題は，次のような数学的に定式化されます：

<u>**問題**</u>．このような写像 F で，$F(\mathrm{D})$ の面積を最小にするものが存在するか？

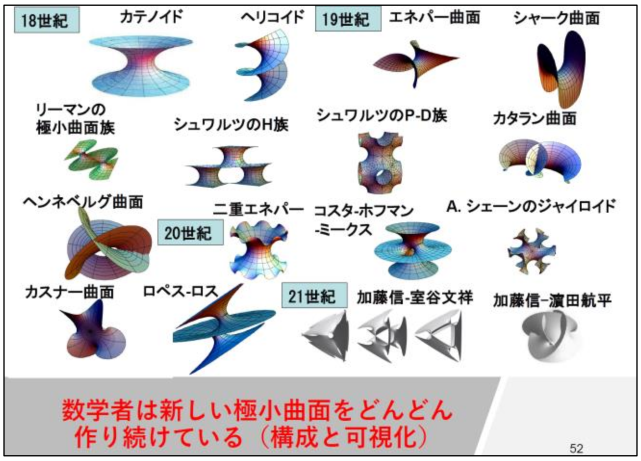
この問題は，1930 年に J. Douglous と T. Radó によって独立に異なる方法で肯定的に解かれました．Courant は，Douglous の方法を改良して，エネルギーを最小化する写像（**調和写像**）と単位円板 D の**等角構造**を絶妙に利用してそのような写像 F を構成する方法を与えています．

曲面の境界を固定した面積の最小性から，必要条件として，平均曲率 $H = 0$ という方程式が導出されます．平均曲率 $H = 0$ を満たす曲面は，**極小曲面**と呼ばれています．さらに，複数の閉曲線を境界とするプラトー問題も，その後の数学者たち

によって解かれています．下のような問題の解は，身の周りの曲線の一つとしてご紹介した懸垂線を軸の回りで回転させた曲面（回転面）で，**懸垂面**と呼ばれる極小曲面です．



19 世紀の数学者によって開発された，どんな極小曲面も（局所的には）2 つの正則関数（複素数変数の意味で微分可能な関数）の組の線積分で表現できるという公式（ワイエルシュトラス-エンネッパー表現公式）は，極小曲面を作る強力な公式です．興味深い新しい極小曲面を数学者が作り続けることを可能ならしめています．近年の計算機技術の進歩と相俟って，曲面の構成と可視化の研究は深化し益々興味深いものとなっています．



これらの画像は，3D-XplorMath および文献 [11], [12], [13] からの出典です．

6. シャボン玉と平均曲率一定曲面

シャボン玉や石鹸泡の表面は，数学的には，ゼロでない平均曲率一定 $H \equiv c \neq 0$（c は定数）なる曲面で表されます．そのような曲面は，CMC（= constant mean curvature）**曲面**と呼ばれます．

１つの自然な疑問は次です．

<u>疑問</u>．シャボン玉は，なぜ丸いか？

これは，数学的には以下のように予想されました．

【ホップ（Heinz Hopf）の予想】
平均曲率一定な閉曲面は，球面に限る．

もしこの予想が証明できれば，シャボン玉の形状が平均曲率一定の閉曲面だから，という上の疑問に対する明快な答が出来るわけです．

肯定的な方向の解答として，次の結果がよく知られています．

<u>定理</u>．平均曲率一定閉曲面Ｓは，次のいずれかの場合，球面である：

●Ｓが球面と位相同型（トポロジー的に同じ）のとき（H. Hopf, S.-S. Chern），

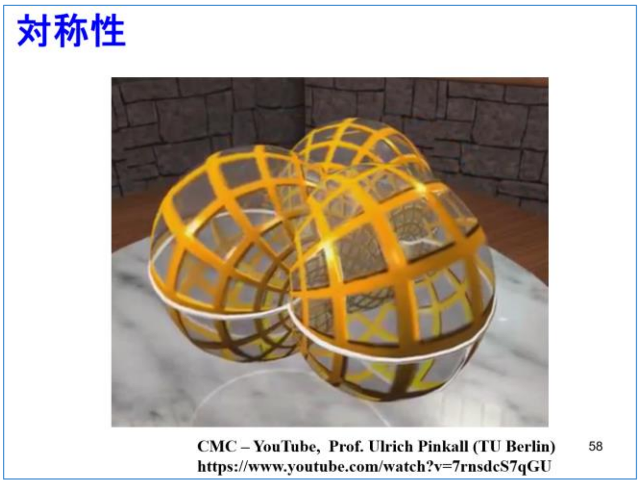
●Ｓが自己交差しないとき（A. D. Alexandrov),

●Ｓの面積は, 同じ体積を囲む曲面の中で極小（安定）のとき（Barbosa & do Carmo）．

どれも見事な定理です．しかし，一般的には否定的です！自己交差している平均曲率一定閉曲面Ｓで球面でないものが存在することが数学者によって示されました！

Henry C. Wente が CMC トーラス面を最初に発見しました (1986 年)． さらに U. Abresch, R. Walter がヤコビの楕円関数による厳密な構成を与えました (1987 年)．これは，微分幾何学と可積分系（ソリトン理論）の新たな関わりのブレイクスルーと微分幾何学における曲面研究の可視化に大きな革新を与えました。

Wente らの結果は，トーラス面(一つ穴の浮き袋の形の曲面) を，**自己交叉を許しますが** 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内へ（ゼロでない）平均曲率一定ではめ込むことができるということです．どのような形になるか？大変興味深いですが，数学研究所と研究交流を続けているベルリン工科大学の Ulrich Pinkall 教授の研究グループの開発した動画を紹介しました．下図は Wente トーラス面の可視化です．



さらに，可積分系の数学理論の手法を微分幾何へ応用して，高度なCMCトーラス面が構成され可視化されています．微分幾何学の曲面研究における可視化技術は，私が大学院学生の頃には考えられなかったような進歩を遂げています．

7. 幾何学と可視化

数学研究所は，21COE 以来，世界のいくつかの拠点の研究グループと交流して「幾何学と可視化」国際研究プロジェクトを推進しています：
●カリフォルニア大学アーバイン校 Richard Palais 教授の研究開発グループ：数学的可視化ソフトウエア“3D-XplorMath”，“VMM”．日本側研究者は，Martin Guest 教授（早稲田大学&数学研究所客員教授），酒井高司教授（東京都立大学 &数学研究所客員教授）が主軸です．
●ベルリン自由大学・ベルリン工科大学 Konrad Polthier 教授，Ulrich Pinkall 教授らの研究プロジェクト「幾何学と力学の離散化」jReality, jtem, 等を研究開発しています．Pinkall 教授らは，21COE 以来幾度も本数学研究所を訪問」しており，この 3 月本学で開催の日本数学会季期研究所（MSJ-SI）「微分幾何と可積分系」（参考資料 [3]）にも招待講演し研究滞在する予定です．
●濱田龍義教授（日本大学生産資源工学部＆数学研究所客員教授）はフリーの数学ソフトウェアの開発プロジェクト“MathLibre”の推進メンバーの一人として活躍，本学で毎年実施の MathLibre＆GeoGebra 特別授業は，もう 10 年以上続いています．
●ウィーン工科大学 Helmut Pottmann 教授，Christian Müller 准教授の研究プロジェクト「幾何的モデリングと産業幾何学」との研究交流も最近始まっています．

これらの研究交流は，2022 年度は，数学研究所の文科省拠点共同利用・共同研究の国際共同研究（対称性, トポロジーとモジュライの数理）に採択研究課題「微分幾何と可積分系」（研究代表者・徳島大学 安本真士講師）として推進されています．

数学の発展が，自然科学・産業の進歩に寄与している一例として，19 世紀（約 150 年前）に発見された極小曲面の一つである**シュワルツの P-曲面**は，1991 年(約 30 年前)炭素化合物としてその存在が予想される **マッカイ結晶**の数学的モデルとして注目されています．また，**シュワルツの P-曲面**は建築デザインのモデルとしても使われています(十数年前)．逆に，自然科学・産業の発展が，3D-XplorMath, MathLibre, GeoGebra, Mathematica などの可視化・ソフトウエアの技術向上を通じて，現代数学の深化をもたらしています．

今後も，「幾何学と可視化」は，数学と自然科学・産業の双方の発展に寄与し続けます．

謝辞

今回のアカデミックカフェでの私のプレゼンおよび抄録の作成にご協力してくださった方々，とくに，野田 知宣氏（明治薬科大学薬学教育研究センター准教授，元 大阪市立大学数学研究所専任研究所員），橋本 要氏（大和大学理工学部准教授，大阪公立大学数学研究所特別研究員），安本 真士氏（徳島大学大学院社会産業理工学研究部講師，大阪公立大学数学研究所客員研究員）には深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] D. Laugwitz（著），山本敦之（翻訳），リーマン - 人と業績，丸善出版，1998 年．
[2] 野上道夫，岡部篤行，貞広幸雄，隅元崇，西川治共著，地理情報科学入門，東京大学出版会，2001 年．
[3] 西川青季，等長地図はなぜできない –地図と石鹸膜の数学–，日本評論社，2014 年．
[4] C.F. Gauss, General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825, (1902) The Princeton University Library.
[5] G.F.B.Riemann, Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grund liegen. Gött.Abh.13 (1863), 1--20.
[6] G. Ricci et T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54 (1901), 125--201.
[7] A.Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätsheorie. Annalen. der. Physik, 49 (1916), 769--822.
[8] 矢野健太郎先生訳・解説，リーマン リッチ レビ=チビタ アインシュタイン マイヤー リーマン幾何とその応用．現代数学の系譜 10，共立出版，1971 年．
[9] 大町英理子，「リーマン幾何学におけるテンソル解析的手法の確立への一考察」、お茶の水女子大学人間文化研究科『人間文化研究年報』第 9 号（1985），107—120.
[10] 大町英理子，n次元リーマン多様体におけるテンソル解析の黎明期，科学/人間 第 38 号，pp1-21，2009.03，関東学院大学教養学会．
[11] S. Kato and H. Muroya, Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends, Osaka J. Math. 49 (2012), 931-992.
[12] S. Kato and H. Muroya, Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends II, Osaka J. Math. 52 (2015), 307-371.
[13] K. Hamada and S. Kato, Nonorientable minimal surfaces with catenoidal ends, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -) (2021) 200:1573–1603.
[14] A.L.Mackay, Periodic minimal surfaces, Nature 314 (1985) 604-606.
[15] A.L. Mackay and H. Terrones, Diamond from graphite, Nature 352 (1991) 72.
[16] Y.Ohnita, M.Guest, R.Miyaoka, and W.Rossman (editors), “Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization”, Proceedings of the 16th Osaka City University International Academic Symposium 2008, Osaka City University, Osaka, Japan, December 15- 20, 2008. OCAMI Studies Volume 3, ISBN：978-4-901409-69-8

参考資料

[1] 2000 年度第 9 回日本数学会国際研究集会 「微分幾何学における可積分系(Integrable Systems in Differential Geometry)」，2000 年 7 月 17-21 日，東京大学数理科学研究科．http://www.math.tsukuba.ac.jp/~moriya/iri-j.html
[2] 第 16 回大阪市立大学国際学術シンポジウム「リーマン面，調和写像と可視化」，2008 年 12 月 15-20 日 大阪市立大学杉本キャンパス開催．
http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/2008/kokusai/OCUsymp08.html
[3] 第 27 回大阪市立大学国際学術シンポジウム「可視化の数理と，対称性およびモジュライの深化」（COVID-19 禍のため 2019 年度から 2020 年度へ延期），2021 年 3 月 21-26 日 大阪市立大学杉本キャンパス開催（対面とオンラインによ

るハイブリッド形式）.
http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/2019/OCUsymp2019/index.html
[4] 第 13 回日本数学会季期研究所「微分幾何と可積分系」,
（COVID-19 禍のため 2019 年度から 2020-2021 年度へ延期）
第 1 弾 2022 年 3 月 1-21 日 大阪市立大学杉本キャンパス開催（ハイブリッド形式）
http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/2020/MSJ-SI2020_e.html
第 2 弾 2022 年 11 月 26 日-12 月 21 日 高松シンボルタワー開催（ハイブリッド形式）
https://www-math.ias.tokushima-u.ac.jp/~yasumoto/gsis20221126/
第 3 弾 2023 年 3 月 3 日-13 日 大阪市立大学杉本キャンパス開催（ハイブリッド形式）予定.
https://www-math.ias.tokushima- u.ac.jp/~yasumoto/msjsi13th3rd20230303/

発表者紹介

大仁田 義裕（オオニタ ヨシヒロ）1958 年生まれ，茨城大学理学部数学科卒，東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士前期課程（修士課程）修了，博士後期課程単位満期退学，1985 年日本学術振興会奨励研究員，1986 年 1 月理学博士（東北大学），1986 年 4 月東京都立大学理学部数学科助手，マックス-プランク数学研究所（当時西ドイツ・ボン）訪問研究員（1987-1989 年），1991 年助教授，1998 年教授を経て，2005 年 4 月大阪市立大学理学研究科数物系専攻教授，2022 年度大学統合により大阪公立大学理学研究科数学専攻教授，2013 年 4 月より現在まで数学研究所所長を務めている．専門は，微分幾何学，調和写像論，本学数学研究所を拠点として国内・海外の多くの共同研究者らと大規模研究プロジェクト「微分幾何と可積分系」を推進に取り組んでいる．