



配信先：大阪科学・大学記者クラブ、文部科学記者会、科学記者会

2025 年 6 月 11 日

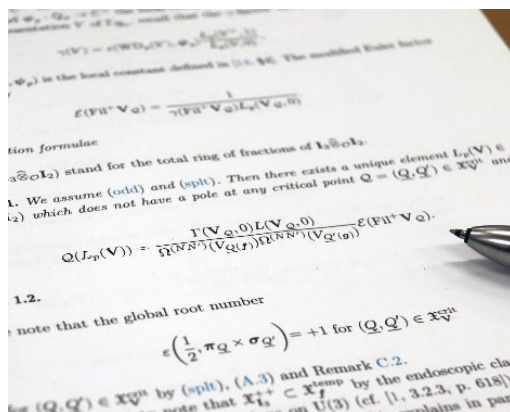
大阪公立大学

新しい p 進 L 関数を開発 —現代数学の発展に期待—

<概要>

大阪公立大学大学院理学研究科の山名 俊介教授、国立台湾大学の Ming-Lun Hsieh 教授は、現代数学の重要なテーマに挑み、コンパクトなユニタリ群の直積 $U(3) \times U(2)^{*1}$ のモジュラー形式^{*2} に付随する 5 変数 p 進 L 関数^{*3} を新たに構成しました。本結果は、次世代の研究者が数学に取り組むための土台となり、数学の発展に寄与することが期待されます。

本研究成果は、2025 年 5 月 21 日に国際学術誌「Advances in Mathematics」にオンライン公開されました。



<掲載誌情報>

【発表雑誌】Advances in Mathematics

【論文名】Five-variable p -adic L -functions for $U(3) \times U(2)$

【著者】Ming-Lun Hsieh, Shunsuke Yamana

【掲載 URL】<https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110355>

<資金情報>

本研究は日本学術振興会の科研費（23K03055、19H01778、22H00096）、文部科学省共同利用・共同研究拠点（JPMXP0723833165）の支援を受けて実施しました。

私はもともと複素 L 関数が専門で、今回の p 進 L 関数の理論（岩澤理論と呼ばれています）は全然知らず、共同研究者から学びながら研究を進めたため、苦労しました。長い論文をレフェリーが丁寧に査読し、長大なレポートを書いて改善を指摘してくれたことは、ありがたかったです。本研究が岩澤理論の更なる発展に寄与することができれば幸いです。



山名 俊介教授

<研究の内容>

現代数学の重要なテーマに、L 関数^{※4}と呼ばれる複素関数の研究があります。一方、モジュラー形式は概して、対称空間上の非常に高い対称性を持つ関数のことです。p 進数^{※5}とは各素数 p に対して定義される数の体系であり、実数や複素数とは全く異なる数の世界を表します。L 関数とモジュラー形式には、複素数を p 進数に取り替えた類似物が存在し、p 進 L 関数や p 進モジュラー形式と呼ばれます。p 進 L 関数を用いて、L 関数の数論的性質を p 進的視点から考えることが岩澤理論です。p 進数の新しい側面として複素数で離散的なパラメータが p 進数では連続的となり、多変数 p 進 L 関数を考えられることがあります。整数で近似できるという複素数にはない p 進数の性質により、近年の研究では複素 L 関数より p 進 L 関数の進展が見られます。

本研究では、京都大学の池田 保教授と市野 篤史教授が予想し、フランス Aix-Marseille University の Raphaël Beuzart-Plessis 氏らによりユニタリ群の場合に証明されたモジュラー形式の周期公式を用い、詳細な計算を行いました。コンパクトなユニタリ群の直積 $U(3) \times U(2)$ のモジュラー形式に付随する 5 変数の p 進 L 関数をできる限り具体的に記述し、構成しました。

<期待される効果・今後の展開>

関連研究として、コンパクトでないユニタリ群の p 進 L 関数も $U(2,1) \times U(1,1)$ の場合に Ming-Lun Hsieh 教授、Michael Harris 教授と構成しています。今後の主要な課題として、p 進 Gross-Zagier 公式^{※6}があります。1 変数モジュラー形式の場合は $U(1,1) \times U(1)$ の p 進 L 関数であり、この公式を $U(2,1) \times U(1,1)$ の p 進 L 関数の場合に拡張することが挙げられます。

<用語解説>

- ※1 : $U(n)$: n 次ユニタリ行列のなす群。ユニタリ群の中でコンパクトなもの。
- ※2 : モジュラー形式 : 概して、対称空間上の非常に高い対称性を持つ関数のこと。1 変数モジュラー形式は楕円関数と強い繋がりがあり、楕円モジュラー形式と呼ばれる。
- ※3 : p 進 L 関数 : L 関数の特殊値を p 進的に補間する性質を持つ p 進解析関数。
- ※4 : L 関数 : 複素平面上の解析関数。数学的対称に付帯してさまざまなものがある。
- ※5 : p 進数 : 有理数から実数に拡張するのは別の方法で、素数 p に対して構成される数の体系。
- ※6 : Gross-Zagier 公式 : 楕円曲線の L 関数の微分値と楕円曲線の Heegner 点の高さの間の公式。p 進数の世界での類似も証明されている。

【研究内容に関する問い合わせ先】

大阪公立大学大学院理学研究科
教授 山名 俊介 (やまな しゅんすけ)
E-mail : yamana@omu.ac.jp

【報道に関する問い合わせ先】

大阪公立大学 広報課
担当 : 谷
TEL : 06-6967-1834
E-mail : koho-list@ml.omu.ac.jp