

2025. 12. 23 開催  
第 14 回 ACADEMIC CAFE  
「異なる「空間」が出会うとき」

## 反応拡散方程式とパターン形成の数学 ―空間にひろがる数理の構造

理学研究科 准教授 物部 治徳

**概要** 拡散方程式は物質や熱が時間とともに広がる様子を記述する方程式であり、ランダムウォークや熱伝導などをはじめ様々な数理モデルで目にすることができます。反応拡散方程式系は、動物の模様形成や氷の融解など、自然現象を記述する数理モデルとしてしばしば用いられます。なかでも、物質を空間内で均一に広げようとする性質をもつ拡散方程式は、基礎的かつ重要な役割を担っています。本カフェでは、拡散方程式の基本的な性質に触れるとともに、パターン形成の話題として、動物の模様などに関連するチューリングの拡散誘導不安定性などを数学的な視点から紹介します。

**キーワード** 反応拡散方程式, チューリングパターン, 自由境界問題, 特異極限法



座談会の様子

### 1. 拡散方程式（フーリエの熱伝導方程式）

「拡散現象」とは、場所によって異なる濃度を持つ物質が、空間一様になろうと広がっていく現象などを示します。例えば、水の入ったコップの中に墨汁などをたらすと、時間が経つにつれて全体に広がっていく様子などに見られます。熱した鉄（フライパンなど）も時間が経つと均一の温度になろうとする様子も同様です。このように、拡散現象というのは自然界の秩序を理解する上で、重要なテーマであることが期待できます。

それでは、拡散現象は数式でどのように表現すればいいのでしょうか？例えば、粒子が直線上にある整数の点のみを1秒後に確立1/2で左右のどちらかに一つだけ移動するような場合を考えます(図1)。このような操作は一見、規則性がないように見えます。

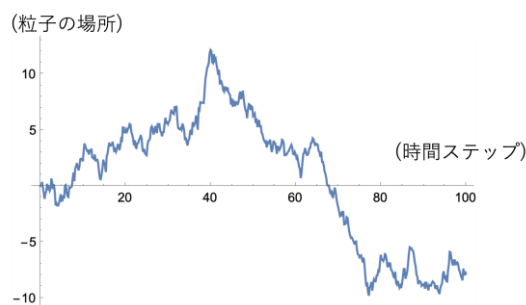


図 1. 100 秒経過する間の粒子の動き

しかしながら、粒子をたくさん用意して同じ実験を行い、それぞれの粒子が描く軌道を重ね合わせると規則性が見えてきます。実は、巨視的な視点における一つの表現として、拡散方程式(またはフーリエの熱伝導方程式)が現れます：

$$u_t = d \Delta u$$

ただし、 $d$  はある正定数、 $u=u(x,t)$  は 1 次元の空間変数  $x$ 、時間  $t$  を変数に持つ関数を表し、 $u_t$  は  $t$  に関する  $u$  の 1 階の偏微分、 $\Delta u$  は  $x$  に関する  $u$  の 2 階の偏微分をそれぞれ表します。今回は空間 1 次元の格子上での説明をしましたが、同様に空間 2 次元、3 次元の格子を考えて同様の考察をすることで熱方程式を導出することができます。この方程式の代表的な特徴は以下の二つがあります：

- (1)関数  $u(x,t)$  の形は、時刻が進むにつれて段々と凹凸がなくなるように動く(平滑化効果)。
- (2) $u(x,0)=0$  となる点  $x$  が存在したとしても、時間が少しでも経過すれば、全ての点  $x$  において  $u(x,t)>0$  となる(無限伝播性)

特徴(1)は粒子が拡散するということを考えると自然な性質だとわかります。一方で、特徴(2)は、離散的な粒子の動きを見ていると考えると、現実では観察できない、巨視的な見方をしたために現れた性質であると言えます。これらの特徴(1)と特徴(2)は非常に興味深く、さまざまな分野で応用されています(例. 画像処理など)。今回は、これらの性質に着目し



つつ、拡散方程式とその周辺に関連する偏微分方程式について紹介したいと思います。

## 2. 拡散誘導不安定性 (Turing 不安定性)

拡散現象は粒子や熱の運動など、さまざまな現象に見ることができます。特徴(1)を考えると、世の中には均一なものばかりになるはずですが、実際は、形や模様など不均一なものがたくさん存在しています。拡散方程式の特徴である平滑化効果と矛盾しているようにも見えます。実は、このような不均一なパターンは、均一にしようとする拡散の効果によって生み出されているかもしれない!?と考える学者がいました。それは、イギリスの数学者アラン・チューリング(1912~1954)です。チューリングは、第二次世界大戦中にドイツ軍の暗号「エニグマ」を解読したことで有名ではありますが、生命現象にも言及しています。チューリングは生物の非対称性を説明する上で、モルフォゲンという物質が生物には存在していると仮定して、その濃度分布に関する単純な反応拡散方程式で表される数理モデルを提唱して、拡散こそが動物の模様(不均一)を生み出す要因になっているのではないかと、という説を唱えました。ここでは、生物の皮膚に現れる模様の数理モデルとして次の反応拡散方程式系に着目してみます：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u^2) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3(u - a) - 2v \end{cases}$$

ここで、関数  $u=u(x,t)$ ,  $v=v(x,t)$  は空間変数  $x$  と時間変数  $t$  によって決まる実数値関数で、それぞれ活性因子、抑制因子というモルフォゲンに対応しており、 $a$  というのが実数値をとるパラメータになります。この方程式は、生物のモデルとしてはあまりにも単純ですが、驚くことにたった二つの未知関数を用いるだけで生物の模様をそれらしく再現することができます(図2,3)。実は、これらの模様が出るためには、モルフォゲンの拡散係数  $D_u$  と  $D_v$  が正値であること、および、抑制因子の拡散係数が十分大きいこと ( $0 < D_u \ll D_v$ ) が本質になります。逆に、 $D_u = D_v = 0$  を満たす場合は、模様が出てきません。つまり、平滑化効果を持つ拡散効果があること、逆に、空間に不均一な状況が生まれていることを示唆します。理論的には、線形化問題の固有値の符号を調べることで確認することができます(参考文献[1][2][4][5][7])。このように拡散効果により不均一性が生まれることを拡散誘導不安定性(チューリング不安定性)と言います。チューリング不安定性は、

現在では様々な研究分野の実験などで確認されており、現在でも盛んに研究されています。

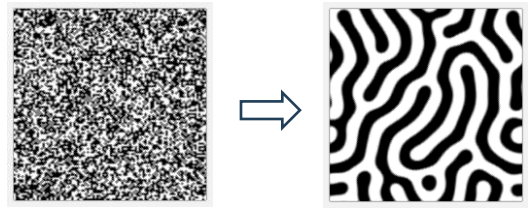


図2. 方程式において  $D_u = 1$ ,  $D_v = 20$ ,  $a = 0.02$  として、初期値はランダムに与え、関数  $u(x,t)$  の値を表した図。左はランダムな初期値を表し、右は時間が十分経過した様子。魚の鱗などの模様と類似したパターンが確認できる。

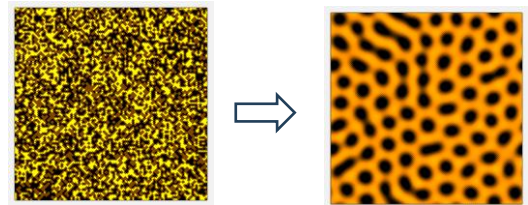


図3. 方程式において  $D_u = 1$ ,  $D_v = 9$ ,  $a = 0.03$  として、初期値はランダムに与え、関数  $u(x,t)$  の値を表した図。左はランダムな初期値を表し、右は時間が十分経過した様子。チーターの模様などと類似したパターンが確認できる。

## 3. 反応拡散系近似

粒子の動きや、熱伝導を考えると、拡散方程式(熱伝導方程式)が現れることを確認しました。それでは、他の現象はどうでしょうか？次に、「時間が刻々と経過するにつれて、形状が変化する現象」に着目していきます。我々が日頃見る自然の形には、そのようなものが数多く存在します。例えば、細胞など生物の多くは細胞膜や皮膚などを境界と捉えれば、形状が変化する現象と言えます。また、氷の形や木の形、雲の形なども、境界そのものがあるわけではありませんが(必要であれば、仮想的に境界があるとみなして)、形状が変化する現象と言えます。このような複雑な現象を数学の道具を用いて捉えるにはどうしたらいいのでしょうか？このような問題を考える場合、

- ・境界を挟んだ、内側、外側での時間発展方程式
- ・境界そのものの時間発展方程式

を考えて数式を立てることがしばしばあります(図4)。しかしながら、この手の問題における数理モデ



ルの構築や解析は容易ではありません。例えば、以下のような問題点を考えることができます：

- ・内部，外部，境界それぞれの発展方程式を同時に考える必要がある
- ・形が変化したり，くっついたり，ちぎれたりする可能性がある

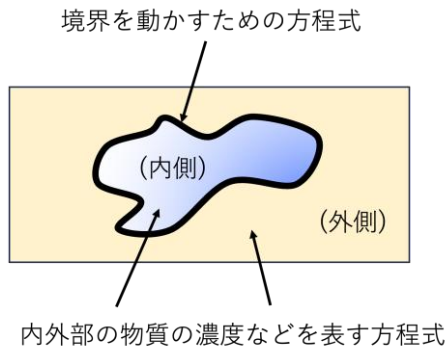


図4. 境界の内外の様子

そこで，方程式を手計算で解いたり解析することは一旦横に置いて，このような問題をどのようにコンピュータを用いて計算をするのか？という点に着目することにします。基本的には，複雑な現象は情報が過多になることが予想されるため，具体的な解を求めることは難しくなります。それに対して，コンピュータは人間では一生かけても出来ない計算を一瞬で実行してくれるので，具体的に解を求めなくても，おおよその動きを追うことができます。では，上記のような形状が変化する問題をコンピュータで扱うことは容易でしょうか？残念ながら，このような問題をコンピュータで扱う場合は，境界が動いてしまうので複雑なアルゴリズムを構築する必要があります。この問題を解決する一つの方法として，複雑な方程式を直接取り扱わずに，何らかの方法で扱いやすい形（コンピュータが得意な形，または既に解析が十分進んでいる方程式の形）で近似する，というアイデアがあります。ここでは，複雑な方程式を解析しやすい方程式の形で近似するために「特異極限」という方法に着目していきます。

具体例として，氷の融解現象を記述する一相ステファン問題に着目することにします。方程式の詳細の説明はここでは避けますが，基本的には水と氷の領域における熱方程式，氷の溶け方を決めるステファン条件によって構成されており，特徴は領域が時間に依存して変化するという点にあります（興味のある方は参考資料[3]を参照）。式は複雑で解析も容易ではありません。しかしながら，実は，一相ステファン問題の水の温度を表す関数は，次の反応拡散方程式系の解  $U=U(x,t)$  で近似することができるということが知られています：

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - kUV \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -kUV \end{cases}$$

ここで， $U=U(x,t)$  は水の温度の近似を表し， $V=V(x,t)$  は補助関数にあたり，氷を溶かすために必要な潜熱を表す関数に対応します。ここで重要になるのがパラメータ  $k$  であり，この値を大きくすると  $U(x,t)$  は元の方程式（一相ステファン問題）の解に収束することが示すことができます。最も注目すべき点は，境界に対する運動方程式が，上の式にはどこにも表れていないということです。このお陰で，数値計算は境界に関するアルゴリズムをわざわざ考える必要が無く，簡単に氷の融解現象の数値モデルの数値計算をすることができます。このように反応項のパラメータ  $k$  を大きくすることを特異極限と言ったりします（特にこの場合は，急速反応極限とも言います）。このように自由境界はある種の特異性になっているわけですが，拡散方程式の特徴(2)である無限伝播性を用いることで，特異性の除去をすることができます。特異極限法は様々な分野で応用されることもあり，現在でも，関連する研究が盛んに行われています（参考文献[1][6]）。

#### 参考文献

- [1] 飯田雅人・二宮広和，『反応拡散系近似とその周辺』，J-stage, 66巻3号, 2014.  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/66/3/66\\_0663225/article-char/ja](https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/66/3/66_0663225/article-char/ja)
- [2] 桑村雅隆，『パターン形成と分岐理論』，共立出版，2015年。
- [3] 西浦廉政，『非平衡ダイナミクスの数理』，岩波書店，2009年。
- [4] 二宮広和，『侵入・伝播と拡散方程式』，共立出版，2014年。
- [5] 三村昌泰，『現象数理学入門』，東京大学出版会，2013年。
- [6] 村川秀樹，『反応拡散系の急速反応極限と非線形拡散問題の反応拡散系近似・線形近似』，応用数学勉強会 2019.  
<https://drive.google.com/file/d/1DvXlZd98P2tiQagPn5tknvXj8N2WmamB/view>
- [7] 柳田英二，『反応拡散方程式』，東京大学出版会，2015年。

#### 参考資料

- [1] 近藤滋，『生命の謎を数学・数理学で解く』，  
[https://www.jst.go.jp/pr/jst-news/backnumber/2015/201504/pdf/2015\\_04\\_p08.pdf](https://www.jst.go.jp/pr/jst-news/backnumber/2015/201504/pdf/2015_04_p08.pdf)

#### 発表者紹介

物部治徳（モノベハルノリ）1982年岡山県生まれ。金沢大学理学部数学科卒業。東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士前期課程修了，博士後期課程修了。その後，ポスドクターの期間を経て，2017年3月より岡山大学理学部数学科の特任准教授に就任。2022年4月から大阪公立大学理学部数学科の准教授に就任，現在に至る。〔海外研究歴〕：2016年にイギリスのオックスフォード大学数学研究所にて訪問研究員，2023年にフランスのエクス＝マルセイユ大学にて訪問研究員。

研究は主に，偏微分方程式の反応拡散系に関連する問題に興味を持ち，伝播現象やパターン生成の理論解析や，界面方程式や自由境界問題など領域が時間変化する問題の理論解析や数値計算法などの研究を行っている。

