

称号及び氏名 博士(理学) 浅野 光祐

学位授与の日付 2025年3月31日

論文名

Analytical and Quantitative Treatment of Chaos by Resonance Singularity in Hamiltonian Systems with a Few Degrees of Freedom using Nonlinear Eigenvalue Problem of Collision Operator

(衝突演算子の非線形固有値問題を用いた少数自由度のハミルトニアン系における共鳴特異性によるカオスの解析的定量的な取り扱い)

論文審査委員 主査 田中 智
副査 溝口 幸司
副査 会沢 成彦
副査 水口 毅
副査 野場 賢一

博士学位論文要旨

Analytical and Quantitative Treatment of Chaos by
Resonance Singularity in Hamiltonian Systems with a
Few Degrees of Freedom using Nonlinear Eigenvalue
Problem of Collision Operator

(衝突演算子の非線形固有値問題を用いた
少数自由度のハミルトニアン系における共鳴特異性
によるカオスの解析的定量的な取り扱い)

浅野光祐(Kosuke Asano)

2025年1月

論文要旨

Analytical and Quantitative Treatment of Chaos by Resonance Singularity in Hamiltonian Systems with a Few Degrees of Freedom using Nonlinear Eigenvalue Problem of Collision Operator

(衝突演算子の非線形固有値問題を用いた少数自由度の
ハミルトニアン系における共鳴特異性によるカオスの
解析的定量的な取り扱い)

浅野光祐(Kosuke Asano)

古典力学において、系の自由度の数と同じだけの独立な運動の恒量が存在する場合、その系は厳密に正準方程式を解くことができる可積分系である。運動の恒量とは、系の時間発展において変化しない保存量のことである。一方、系の自由度よりも独立な運動の恒量の数が少ない系は、正準方程式を解くことが原理的にできない非可積分系である。多くの科学者達はそのような非可積分系に対して、数値的に方程式の解き、軌道の時間発展を得ることで多くの自然現象を理解している。

本論文では、少数自由度の非可積分なハミルトニアン系に現れるカオスを分析する。特に第 2 章では、正準方程式を解くことで軌道の時間発展を求める従来の伝統的な方法の代わりに、古典力学における時間発展の生成演算子である古典リウビリアン（またはリウビル演算子）の固有値を解析し、運動の恒量に関する重要な情報を得ることで、非可積分系を解析的に取り扱うことができることを示す。この博士論文は全 4 章で構成されており、以下に各章の概要を述べる。

第 1 章ではニュートン力学の誕生からポアンカレの非可積分定理までの古典力学の歴史について概説した。1609 年にケプラーによって惑星が楕円軌道で運動することを発見してから約 80 年後の 1687 年に、ニュートンが 2 つの物体間に重力相互作用が働く 2 体問題を

解き、惑星の楕円運動を導くことでニュートン力学が確立した。そこでニュートンを含めた科学者たちは、3体問題を解析的に解くことに挑戦した。しかし、その方程式は18個の変数で書き表される非常に複雑な運動方程式であるため、最終的には3体の運動にいくつかの制限を加えた円制限3体問題を解析することが試みられた。円制限3体問題は2自由度系という自由度の数が少ない系であり、ヤコビ定数と呼ばれる運動の恒量が1つ存在している。また先に述べたように、リウビル(=アーノルド)の定理から系の自由度の数と等しい数の独立な運動の恒量が存在する系は厳密に方程式を解くことができる可積分系であるため、円制限3体問題はヤコビ定数と独立な運動の恒量をあと一つ見つけることができれば厳密に解くことが可能である。この円制限3体問題にオイラーやラグランジュなどの名だたる科学者が挑戦するも、誰一人として厳密解を求めることができなかった。ニュートン力学が誕生してから200年以上経った1892年、ポアンカレがこの3体問題は原理的に解くことができないという定理を導くことで否定的に解決した。この定理はポアンカレの定理として知られ、この定理は言い換えると、円制限3体問題はヤコビ定数に独立な運動の恒量が存在しないことを意味する定理である。2体問題では天体の楕円長半径と離心率という2つの独立な運動の恒量が存在しているのに対し、円制限3体問題は1つの運動の恒量しかないため、円制限3体問題は3体目の天体によって運動の恒量の破壊が引き起こされている。この運動の恒量の破壊は、ポアンカレの定理から摂動級数に現れる小分母(共鳴特異性とも呼ばれる)に起因していることが理解されている。この小分母の問題のために、系の軌道がカオスになるため、非可積分系を解析的に評価することが難しいのである。そのため、多くの科学者はそれらの運動方程式を数値的に解くことによって軌道の時間発展を計算している。しかしながら、本論文ではそのような非可積分系に対して、運動の恒量に関する重要な情報を解析的に取り扱う方法を提示する。

第2章では、正準方程式を解くことで軌道の時間発展を求める代わりに、古典力学における時間発展の生成演算子であるリウビリアン固有値を解析することで、非可積分系における運動の恒量の破壊を解析的かつ定性的に取り扱うことができることを示す。具体的に解析するにあたって、シンプルな摂動項を持つモデルであり、かつ直感的に理解しやすいモデルとして、非可積分振り子のモデルを考え、その系における運動の恒量の破壊の程度を定量的に解析した。リウビリアンのゼロ固有値に対応する固有状態は運動の恒量であることを意味する。そして、非摂動系におけるリウビリアンのゼロ固有値は、各共鳴点直上で縮退している。これは量子力学におけるエネルギーの縮退に類似している。それらのことから、量子力学におけるエネルギーギャップと同様に、可積分系である非摂動リウビリアンに非可積分的な相互作用が加わると、リウビリアンの固有値が反発することが予想される。その反発によるゼロ固有値近傍のギャップ(振動数ギャップ)の大きさを推定することによって、運動の恒量の破壊の程度を定量的に評価する。前述のように、非可積分系を解析的に扱うことは、系における共鳴特異性のために困難であり、リウビリアンの固有値問題にも同様のこ

とが言える。そこで、非摂動リウビリ안의ゼロ固有値に対応する固有状態に射影する射影演算子を導入し、求めるリウビリ안의固有値を共鳴点直上の場合に限定する。そして、この射影演算子によって得られる衝突演算子の固有値問題を扱うことでリウビリ안의ゼロ固有値近傍の振動数ギャップの大きさを定量的に解析する。この衝突演算子の固有値はリウビリ안의固有値と等しいため、衝突演算子の固有値問題を解くことでリウビリ안의固有値の振動数ギャップを求めることが可能である。ここで、衝突演算子は元々、非平衡統計力学における共鳴特異性による時間対称性の破れを示す際に重要な役割を果たす演算子であり、この衝突演算子を用いることで共鳴特異性の効果をうまく取り出すことができる。一方で、少数自由度の古典系において共鳴特異性は運動の恒量の破壊を引き起こし、系を非可積分系にする。そこで、その手法を少数自由度の古典系に応用することによって、共鳴特異性による運動の恒量の破壊を定量的に解析する。衝突演算子はその固有値の関数であるため、衝突演算子の固有値問題は固有値に関して非線形であることから、非可積分系に対する衝突演算子の固有値問題を完全に解くことは非常に困難である。しかし、むしろこの非線形性を利用し、衝突演算子の固有値問題を直接的に解くことなく、ゼロ固有値近傍の振動数ギャップの大きさを評価することを試みた。この独自の方法によって、少数自由度の非可積分系におけるカオスについて解析的に評価した。具体的に、衝突演算子の級数展開に含まれる振動数分母の収束条件から衝突演算子の存在条件を解析することによって、リウビリ안의固有値の振動数ギャップを解析的定量的に見積もった。

その結果、摂動パラメーター λ が1に比べて十分に小さい場合、 $N=1$ となる M/N 共鳴点直上での固有値スペクトルにおける振動数ギャップの大きさは λ の1次に比例することを示した。また、非可積分振り子の場合だけでなく、少数自由度の非可積分系であるならば、基本的に M/N 共鳴点直上での振動数ギャップの大きさは λ の1次に比例するというモデルに依存しない結果が得られることを明らかにした。この結果は量子力学における有限に縮退した固有値の準位反発幅に類似した結果である。一方で、 $N \geq 2$ となる M/N 共鳴点直上では、非可積分振り子という相互作用のフーリエ係数が特殊な形をしたモデルのために、固有値の振動数ギャップの大きさは λ の N 次に比例することも示した。

また、衝突演算子の存在条件から求めた振動数ギャップの大きさに関する理論的な結果の妥当性をハミルトンの運動方程式を数值的に解くことによって確認した。具体的には、 M/N 共鳴点近傍における軌道に現れる最小の角振動数が λ の N 次に比例することを数値計算によって確かめた。

第3章では、非可積分振り子より相互作用が複雑である太陽-木星-小惑星の楕円制限3体問題を扱い、第2章でのリウビリ안의固有値問題における議論を適用するための準備段階の研究を行った。リウビリ안의固有値問題の解析はハミルトニアンが時間に依存しない保存系の場合に適用できるが、楕円制限3体問題はハミルトニアンが時間に依存するため、この解析を適用することができない。そこで、小惑星の運動を木星と共鳴運動する場合

に限ることで、ハミルトニアンを近似し、時間に依存しない有効ハミルトニアンが得られた。これによって、リウビリヤンの固有値問題の解析を適用できるハミルトニアンを得ることができた。

現在の小惑星分布において、3:2 共鳴点、すなわち木星と小惑星の公転周期の比が 3:2 となる共鳴点近傍で数千個の小惑星が存在しており、それらの小惑星群はヒルダ群小惑星として知られている。これに対して、数十万個の小惑星が存在する小惑星帯では、3:1 および 2:1 共鳴点近傍で小惑星はほとんど存在せず、カークウッドギャップと呼ばれる小惑星分布における間隙を生じさせている。本研究では、小惑星の運動を共鳴点近傍に限定することでハミルトニアンを近似し、各共鳴点近傍での有効ハミルトニアンを導出した。その際に以下の二つの近似の手法を用いている：

(A) 複数の小さいパラメータに関して、摂動項のフーリエ係数の中の小さな寄与を無視する摂動解析

(B) ハミルトニアンの中で急激に振動する寄与を無視し、ゆっくり振動する寄与のみを摂動項として扱う時間平均近似

近似(B)のために、2 自由度の時間に依存するハミルトニアンである楕円制限三体問題のハミルトニアンは、正準変換を用いることで 2 自由度の時間に依存しないハミルトニアンに縮約できる。この自由度の縮約により、リウビリヤンの固有値問題の解析を行うことが可能なハミルトニアンを得ることができた。

共鳴点近傍の小惑星の軌道不安定性を理解するために、この近似したハミルトニアンの摂動の大きさの比較を行った。3:2 共鳴点近傍の小惑星のハミルトニアンは、摂動が加わった系にもかかわらず可積分系である単一共鳴ハミルトニアンとして近似できることを示した。一方で、3:1 および 2:1 共鳴点近傍の小惑星のハミルトニアンは、非可積分系である二重共鳴ハミルトニアンとして近似できることを示した。これらの結果は、ヒルダ群小惑星の運動が規則的であることに対応し、カークウッドギャップ近傍の小惑星の運動がカオス的な挙動であることに対応することを示している。

また、自由度の縮約によって、数値的に軌道不安定性を分析する際に用いられるポアンカレ断面の分析をすることが可能になった。実際にポアンカレ断面の分析を行うと、3:2 共鳴の場合は、ポアンカレ断面上で規則的に点が並ぶことによってできる曲線を確認することができた。すなわち、3:2 共鳴点近傍の小惑星は可積分的な振る舞いをすることを示すことができた。一方で、3:1 および 2:1 共鳴ではポアンカレ断面上で不規則に点が描画されたため、それらの小惑星はカオス的な挙動をすることを示すことができた。したがって、単一共鳴ハミルトニアンや二重共鳴ハミルトニアンで分類する方法だけでなく、ポアンカレ断面の分析からも、ヒルダ群小惑星が規則的な運動をし、カークウッドギャップ近傍の小惑星がカオス的な挙動をすることを示した。

第 4 章では第 2,3 章の総括を行う。また、章の最後に将来の研究として、リウビリヤンの

固有値の縮退の準位反発と小惑星帯に現れるカークウッドギャップを結び付ける方法について提示する。

業績リスト

(論文)

- [I] Kosuke Asano, Kenichi Noba, and Tomio Petrosky, Analytical Treatment of a Non-integrable Pendulum Based on Eigenvalue Problem of the Liouville Operator, to be published in *Chaos*.
- [II] Kosuke Asano, Kenichi Noba, and Tomio Petrosky, Stability of Hilda asteroids at 3: 2 resonance point in restricted three-body problem, arXiv preprint arXiv:2409.05102 (2024).

(学会発表)

- [I] 浅野, 野場, Petrosky, 共鳴点近傍での小惑星に関する楕円型制限 3 体問題の自由度の縮約, 日本物理学会, オンライン開催, 2020 年 3 月.
- [II] 浅野, 野場, Petrosky, 小惑星の楕円型制限 3 体問題における共鳴点近傍での自由度の縮約とポアンカレ断面, 日本物理学会, オンライン開催, 2020 年 9 月.
- [III] 浅野, 野場, Petrosky, 小惑星の楕円型制限 3 体問題における共鳴点近傍での自由度の縮約とポアンカレ断面 II, 日本物理学会, オンライン開催, 2021 年 3 月.
- [IV] 浅野, 野場, Petrosky, 小惑星の楕円型制限 3 体問題における共鳴点近傍での自由度の縮約とポアンカレ断面 III, 日本物理学会, オンライン開催, 2021 年 9 月.
- [V] 浅野, 野場, Petrosky, 楕円型制限 3 体問題における共鳴点近傍での小惑星の運動のカオスおよび安定性とリアプノフ指数, 日本物理学会, オンライン開催, 2022 年 3 月
- [VI] 浅野, 野場, Petrosky, 小惑星分布に対する共鳴点近傍におけるヒルダ群小惑星の運動の安定性の根拠と Kirkwood gaps での不安定性の根拠, 日本天文学会, 新潟大学, 2022 年 9 月
- [VII] 浅野, 野場, Petrosky, 非可積分弾性振り子の共鳴点近傍における古典リウビリヤンの固有値に対する準位反発幅の解析的評価, 日本物理学会, 東北大学, 2023 年 9 月
- [VIII] 浅野, 野場, Petrosky, 共鳴点近傍における非可積分系古典リウビリヤンの固有振動数ギャップ幅の解析的評価, 日本物理学会, オンライン開催, 2024 年 3 月

学位論文審査結果の要旨

学位論文提出者氏名： 浅野 光祐

学位論文題目：Analytical and Quantitative Treatment of Chaos by Resonance Singularity in Hamiltonian Systems with a Few Degrees of Freedom using Nonlinear Eigenvalue Problem of Collision Operator

(衝突演算子の非線形固有値問題を用いた少数自由度のハミルトニアン系における共鳴特異性によるカオスの解析的定量的な取り扱い)

時間に依存しないハミルトニアンを持つ古典的な2自由度保存力学系において、ハミルトニアンとは独立した保存量が存在しない場合、系は本質的に非可積分系となる。本研究は、そのような2自由度非可積分系において、共鳴特異性によって生じるカオスの発生を理論的に研究するものである。

本研究の第1部では、振り子と調和振動子が結合した2自由度非線形振り子系を対象に、古典的リウビル演算子の固有値問題という新しい観点から定量的解析を試みている。リウビル演算子は、位相空間における分布関数の時間発展を記述するリウビル方程式に現れる、古典力学の時間発展生成子である。この固有値問題の手法は主に非平衡統計力学の分野において多自由度系で用いられてきたが、本研究ではこれを少数自由度系に適用した点に独自性がある。まず、振り子と調和振動子の相互作用を無視した非摂動系については、振り子と調和振動子の角振動数が簡単な整数比を成す共鳴点で、リウビル演算子の振動数固有値が無限に縮退したゼロ固有値であることを示した。一方、摂動が加わった系では、射影演算子法を用いて一種の有効リウビル演算子である「衝突演算子」の固有値問題に帰着させ解析を行った。この固有値問題は非線形だが、その非線形性を利用して固有値問題を直接解くことなく、衝突演算子の存在条件を評価することで振動数固有値を定量的に見積もることに成功した。結果として、共鳴点においてゼロ固有値の周りに振動数ギャップが生じ、そのギャップの大きさが相互作用係数のべき乗に比例することを明らかにした。この成果は、解析が困難とされる非可積分系において、解析的かつ定量的な結果を得た点で重要である。

本研究の第2部では、2自由度非可積分系である楕円制限3体問題を取り上げ、木星との共鳴点に位置する太陽系小惑星の運動におけるカオスの出現を論じている。この系は各共鳴点において近似的に2自由度保存力学系とみなせることを示し、その有効ハミルトニアンが特定の形状のハミルトニアンに分類できる場合に小惑星がカオスの運動を示すことを明らかにした。この結果は、制限3体問題の解析においても有効ハミルトニアンを用いたリウビル演算子の固有値問題による手法が有効であることを示しており、カークウッドギャップと呼ばれる小惑星帯における分布のギャップがリウビル演算子の振動数ギャップに対応する可能性を示唆する重要な成果である。

以上のように、本研究は、2自由度非可積分系の共鳴点における動力学に関して、リウビル演算子の固有値問題という新しい視点から理論解析を行う手法の基礎を構築したという点で、意義のある研究である。

本委員会は本論文を学位論文として十分な内容を有しているものとして判断した。

主査 田中 智
会沢 成彦
溝口 幸司
水口 毅
野場 賢一