



# 数学で金融を合理的に組み立てる －金融工学の概要－

1

2015年6月10日

一橋大学商学部商学研究科

特任教授 池森俊文

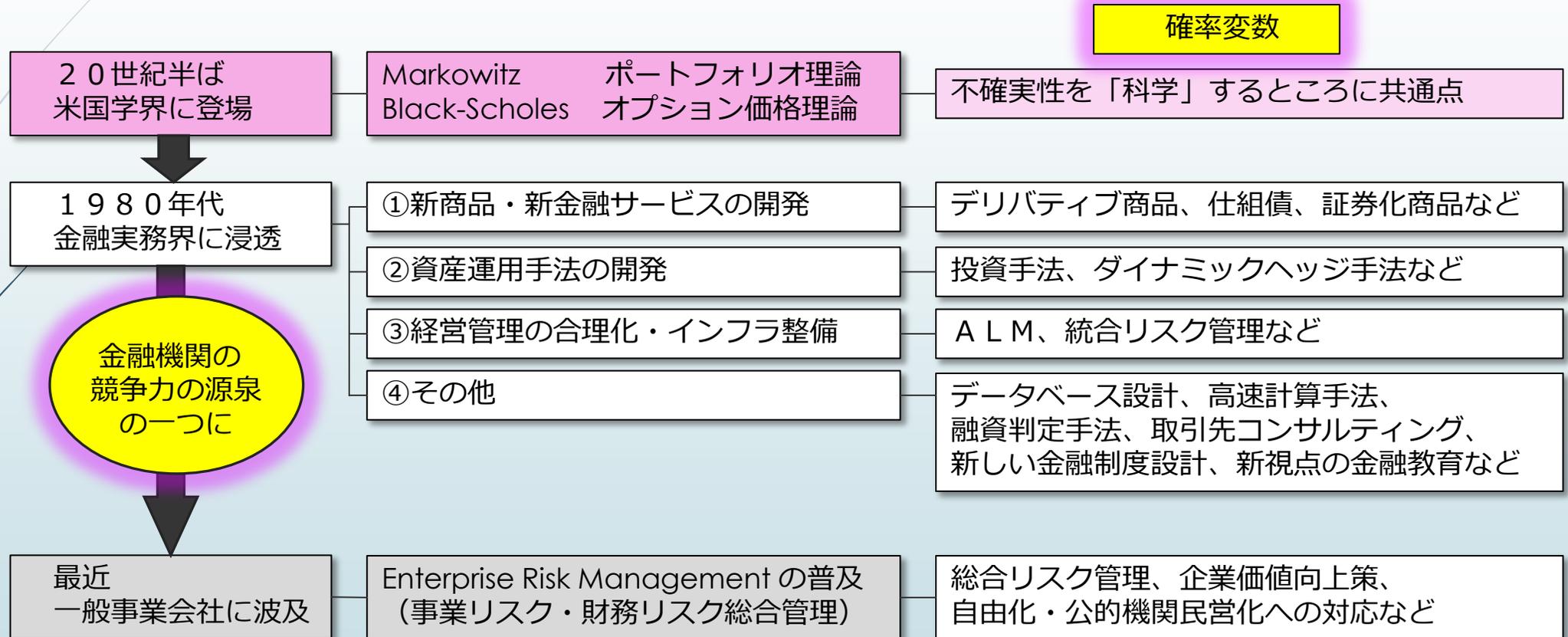
## 【簡単な自己紹介】

(略歴)

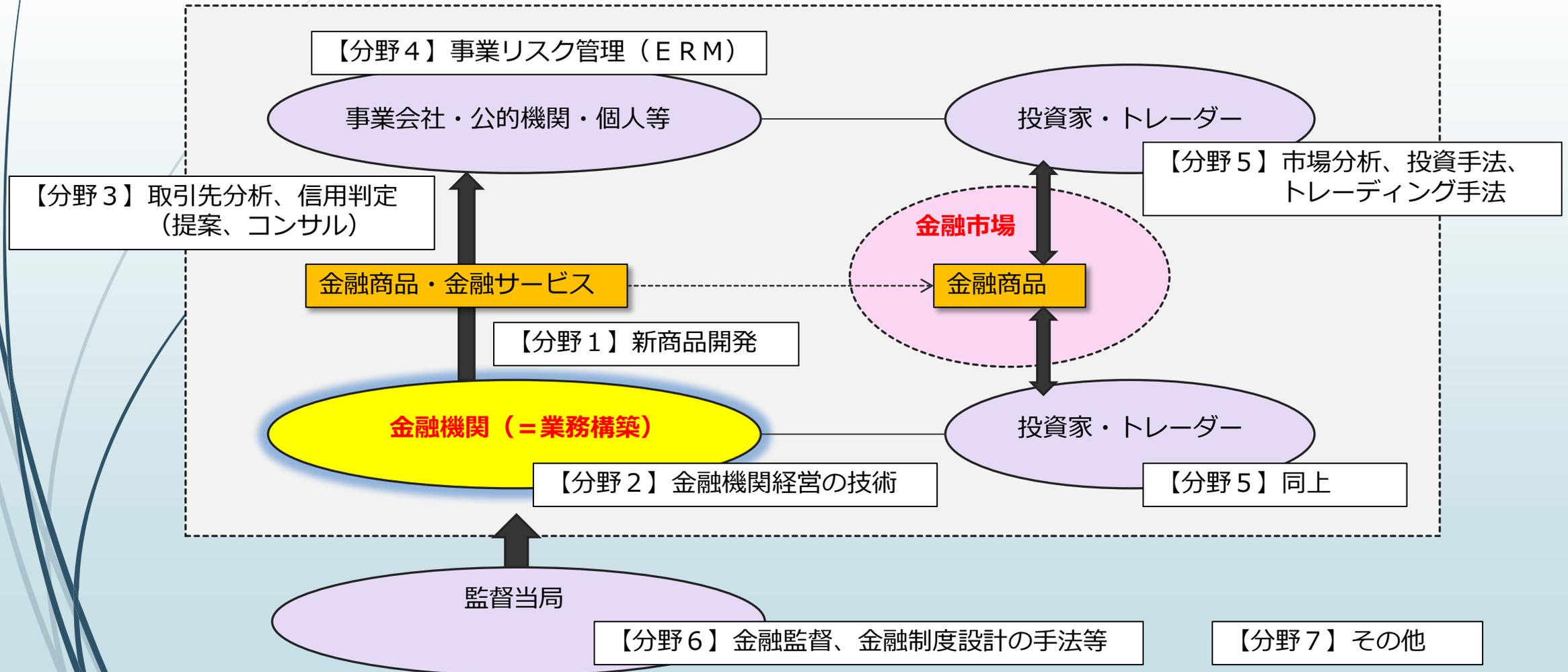
- 1953年7月 広島県生まれ。中学・高校（広島大附属）で兼田先生と一緒に
- 72年3月 東京大学理科 I 類入学
- 77年3月 理学部数学科卒業
- 4月 日本興業銀行入行  
経理部、広島支店、計量システム開発室、金融商品開発部  
フィナンシャルエンジニアリング部、総合リスク管理部
- 2000年9月 みずほホールディングス（株）
- 02年4月 みずほ第一フィナンシャルテクノロジー（株）取締役
- 07年1月 同社 代表取締役社長
- 13年4月 同社 退任、一橋大学大学院商学研究科特任教授
- 現在に至る

# 1. 金融工学の登場と金融業務

【概要】 金融工学は学界から金融実務界へと普及、今や金融機関の競争力を決定付ける重要要素に

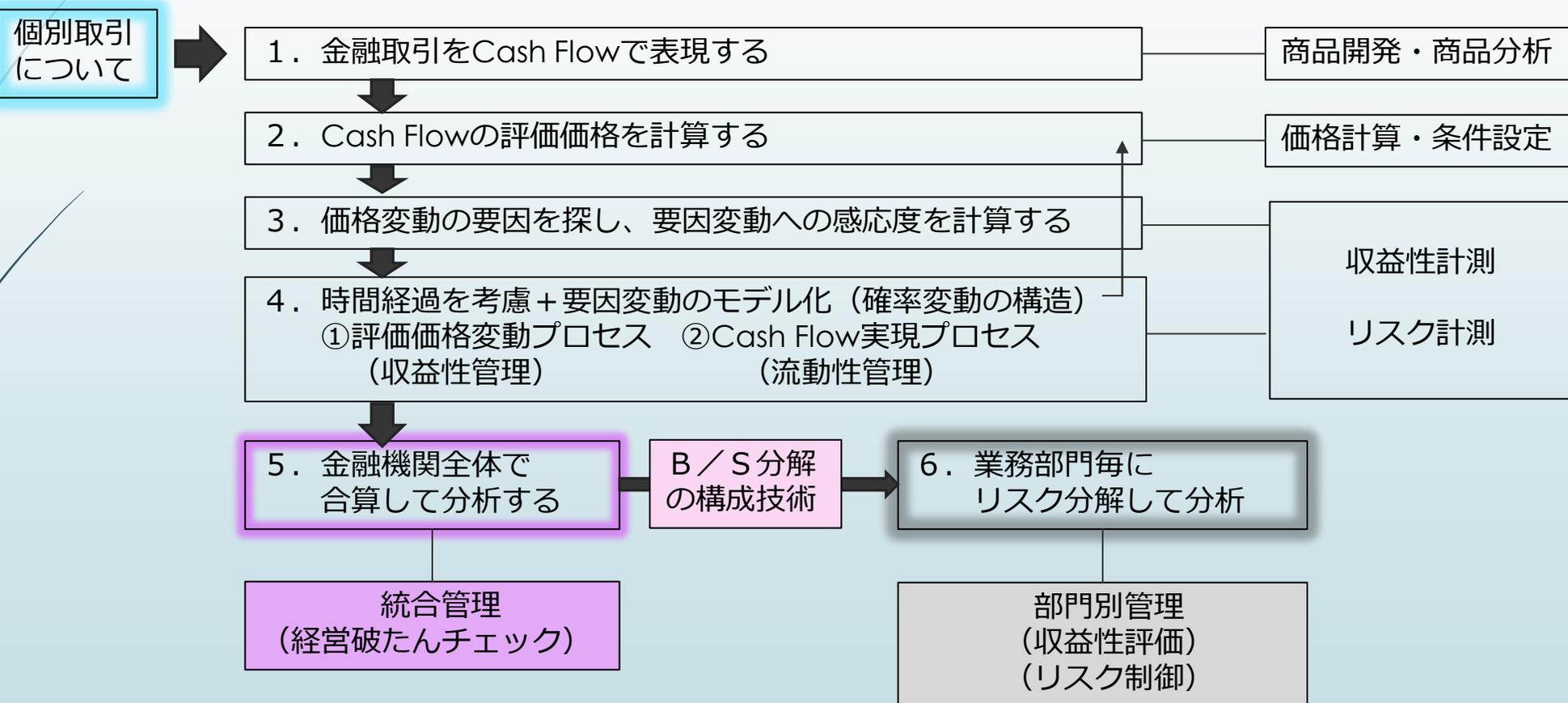


## (参考) 金融工学が対象とする主要分野



## 2. 金融への数理的アプローチの手順

【要点】 金融を数理的的手法によって分析するための手順は概略以下のとおり。



## 2-1. 金融取引のCash Flow表示

【概要】 Cash Flow表示によって金融取引の構造と経済効果が明確になる

(1) Cash Flow表示の3要素

発生時点（固定、event発生、最適行使時点）

大きさ（固定、変動要素の関数形）

通貨

(2) 金融取引の事例

与信（-、+++）、受信（+、---）

デリバティブ：将来時点でのCash Flowの交換または交換の権利

$$C(T) = S(T) - K \quad C(T) = \text{Max}[S(T) - K, 0]$$

証券化商品：複数の金融取引からのCash Flow群を別の基準で再分解

$$\sum_j A_j(T) = \sum_k B_k(T)$$

(3) 金融取引全体は、加法と実数倍について線形空間を構成

## (参考) 金融商品のCash Flow表示の例

金融商品	t	0	1	..	t	..	T
貸出、利付債	+		3	..	3	..	3+100
	-	-100		..		..	
預金	+	100					
	-		1+100				
金利スワップ	+		c	..	c	..	c
	-		r(0)	..	r(t-1)	..	r(T-1)
コールオプション	+						Max[S(T)-K,0]
	-	-P					
一般に	+		f(1)	..	f(t)	..	f(T)
	-	-f(0)					

(注) 簡単のために年1回のCash Flowとする

貸出、利付債 元本100, 利息 3

預金 元本100, 利息 1

金利スワップ 固定金利 c と変動金利 r(t-1) の交換

オプション 取得のために

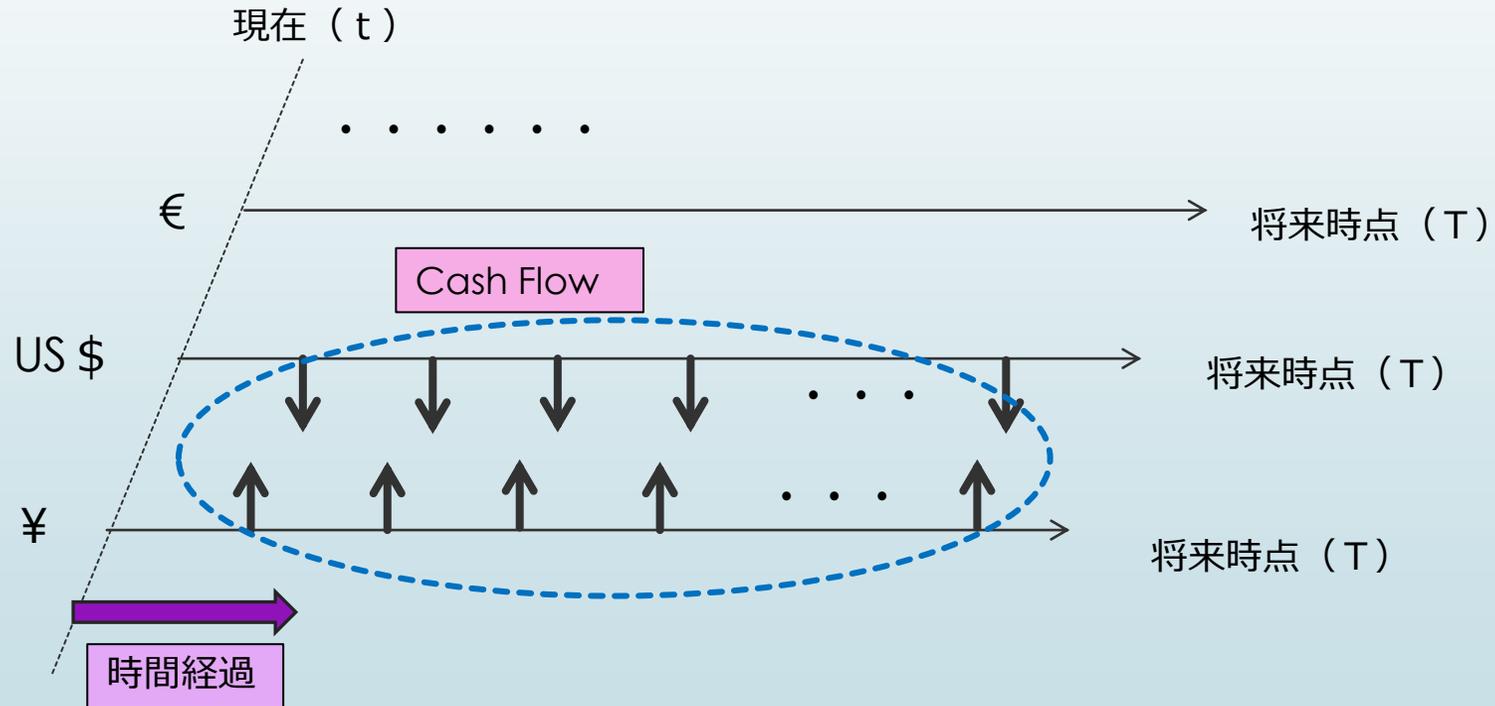
一般に 各時点のCash Flowは、(定数も含め) 何かを変数とする関数形で表示される

## (参考) 金融商品のCash Flow表示のための空間

【概要】 金融商品をCash Flow表示するための空間イメージは以下のとおり

<Cash Flow表示の3要素>

- ・発生時点（固定点、最適行使、event発生）
- ・金額の大きさ（定数、指標を変数とする関数形）
- ・通貨



# (要点) 新商品開発はCash Flowの設計から

## <新商品開発の種類>

(1) 新型商品開発 : 新しいコンセプトの金融商品を創出するもの

- デリバティブ 原資産の拡大 (株式、債券、金利、商品、天候、信用、災害、・・・)  
新類型 (先渡、先物、スワップ、オプション)  
類型の合成 (先物オプション、スワップション、オプションオンオプション)  
新型ペイオフ (エキゾティック商品)
- 証券化商品 モーゲージ債  
CDO (Collateralized Debt Obligations)

(2) 組合せ商品開発 : 従来からある金融商品を組み合わせる新しい金融商品を作るもの

- ・・・リンク債
- ・・・型貸出、・・・型預金
- 投資商品 (株式等の選択・組合せ方法)

# (事例) デリバティブ商品の展開

<デリバティブ取引の種類>

(現時点売買)

現物取引

(1) 原資産による展開

(将来時点売買)

現物取引

Cash Flow交換として契約

価格の先決め

標準化して取引所で取引

(2) 取引類型による展開

スワップ取引

先渡取引

先物取引

選択権付与

選択権付与

選択権付与

スワップシオン

オプション取引

先物オプション

(3) Cash Flowの工夫による展開

Exotic Products

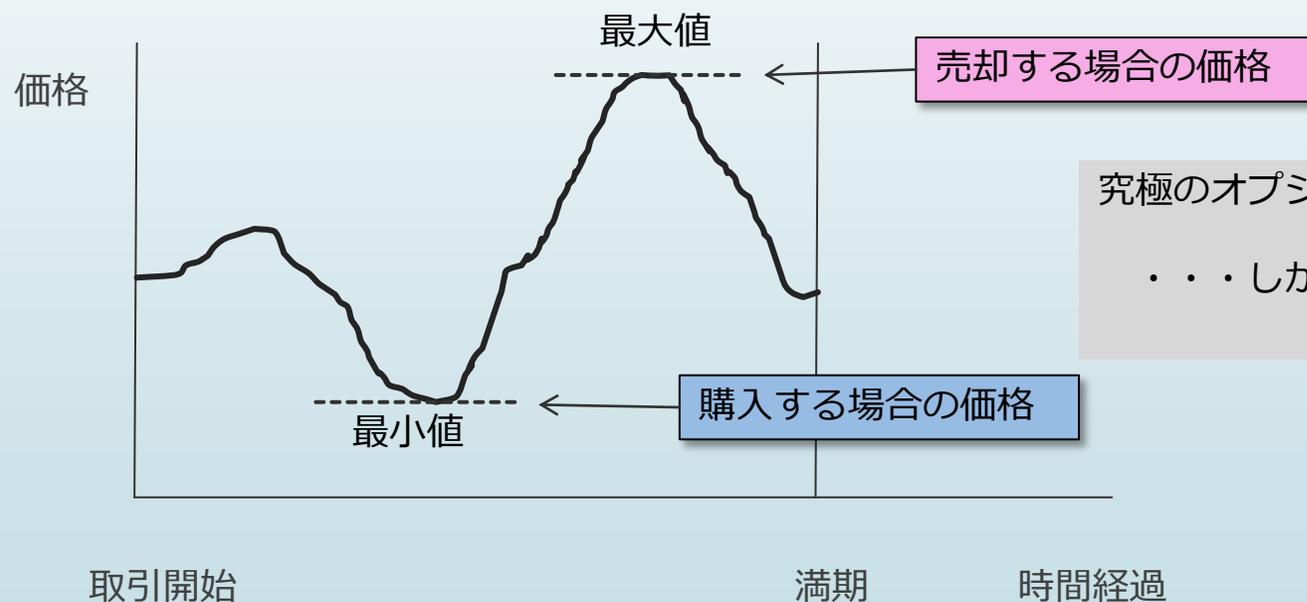
選択権付与

オプション・オプション

## (参考) Cash Flowの工夫による新商品開発

### (1) 権利を大きくするオプション：Look Back Option

- 満期までの一定期間の一番安い価格で購入
- 満期までの一定期間の一番高い価格で売却



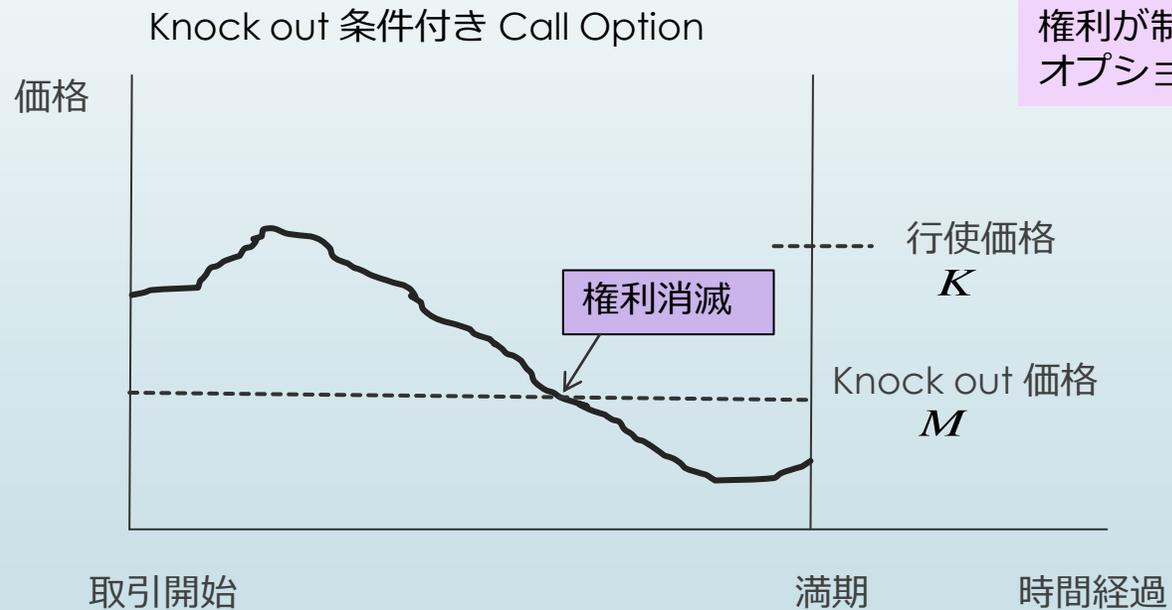
究極のオプション

・・・しかしプレミアムが高い

## (続き)

(2) 権利を小さくしてプレミアムを安くするオプション: **Knock out Option**

- 原資産価格が、満期までに権利行使の可能性の低いある一定価格に達したら、  
選択権が消滅してしまうオプション



権利が制限される分だけ  
オプションプレミアムが安くなる

## (参考) 組合せによる新商品開発

<為替リンク債の例>

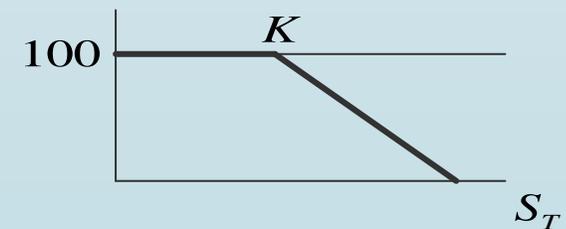
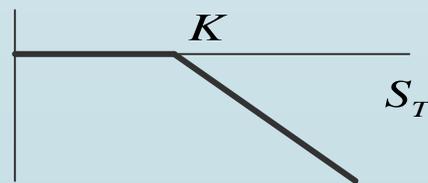
(1) 材料

$$\boxed{\text{普通社債}} + \boxed{\text{通貨option (売り)}} = \boxed{\text{為替リンク債}}$$

(2) キャッシュフロー

$$P = \frac{a}{1+r} + \dots + \frac{a}{(1+r)^T}$$

	社債CF	option CF	再編	合成
0	-100	P	-P	-100
..	..		..	..
t	c		a	c+a
..	..		..	..
T	c+100	-Max[S-K, 0]	a	C+a +100-Max[S-K, 0]



## (参考) $Max[X, Y], Min[X, Y]$ の基本変形ルール

(公式1) どのような  $a$  に対しても

$$Max[X, Y] = a + Max[X - a, Y - a]$$

$$Min[X, Y] = a + Min[X - a, Y - a]$$

(公式2)  $c > 0$  に対して

$$cMax[X, Y] = Max[cX, cY]$$

$$cMin[X, Y] = Min[cX, cY]$$

(公式3)  $c < 0$  に対して

$$cMin[X, Y] = Max[cX, cY]$$

$$cMax[X, Y] = Min[cX, cY]$$

(適用例)  $Max[\tilde{S}(T) - K, 0] = \tilde{S}(T) - K + Max[0, K - \tilde{S}(T)]$  【プット・コール・パリティ】

(例)

$$Max[8, 5] = 3 + Max[8 - 3, 5 - 3]$$

(例)

$$2Max[8, 5] = Max[16, 10]$$

特に、 $c = -1$  のとき、

$$-Min[X, Y] = Max[-X, -Y]$$

$$-Max[X, Y] = Min[-X, -Y]$$

### <新商品開発に当たっての要検討事項>

- (1) 商品設計：相手にとって有効な経済価値を提供するpay-off (Cash Flow) 設計

$$F = (f(t, \tilde{x}(t)))$$

- (2) 価格計算方法

$$p(F) = \sum_{t=1}^T D(t) \cdot E^Q[f(t, \tilde{x}(t))]$$

- (3)  $p(F)$  のリスク特性の分析とリスク制御手法の検討
- (4) 顧客需要の掘り起こし（売り需要と買い需要の両方があることが望ましい）
- (5) 会計処理
- (6) 価格提示や会計処理、リスク管理、取引管理等のための情報フロー、システム開発
- (7) 担当者教育、管理者・役員教育

## 2-2. 評価価格の計算

【概要】 金融取引から発生するCash Flowに対して現在時点での評価価格を計算する

(例1) 利付債 クーポン  $c$  %、満期  $T$  年

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{1+r_1} + \frac{c}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{100+c}{(1+r_T)^T} \\ &= c \cdot D(1) + c \cdot D(2) + \dots + (100+c) \cdot D(T) \end{aligned}$$

$D(t)$  を割引関数という

$$D(t) = \frac{1}{(1+r_t)^t}$$

(例2) Call Option 満期  $T$  年、原資産価格  $S(0)$ 、行使価格  $K$

$$\begin{aligned} V &= S(0) \cdot N(d_1) + K \cdot D(T) \cdot N(d_2) \\ &= E_0^Q [\text{Max}(\tilde{S}(T) - K, 0)] \cdot D(T) \end{aligned}$$

ただし、 $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$

$$d_1 = \frac{\log S(0)/(K \cdot D(T))}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

(例3) 一般的に、

$$V = \sum_{t=1}^T E_0^Q [\tilde{C}(t)] \cdot D(t)$$

リスク中立な確率の下で「Cash Flowの期待値」を計算して、「現在価値」に割引く  
背景にはHedge Portfolioの構成と、「裁定取引不可能な市場」の仮定がある

## (参考) 割引現在価値

【概要】 利付債の割引現在価値の意味を次のように考える

(1) 世の中に年率  $r$  の増殖手段があったとする。

現在                      1年後                      2年後                      . . .                       $T$ 年後

(2) 今、 $X$  の財産  
があれば . . .

$$X \longrightarrow X(1+r) \longrightarrow X(1+r)^2$$

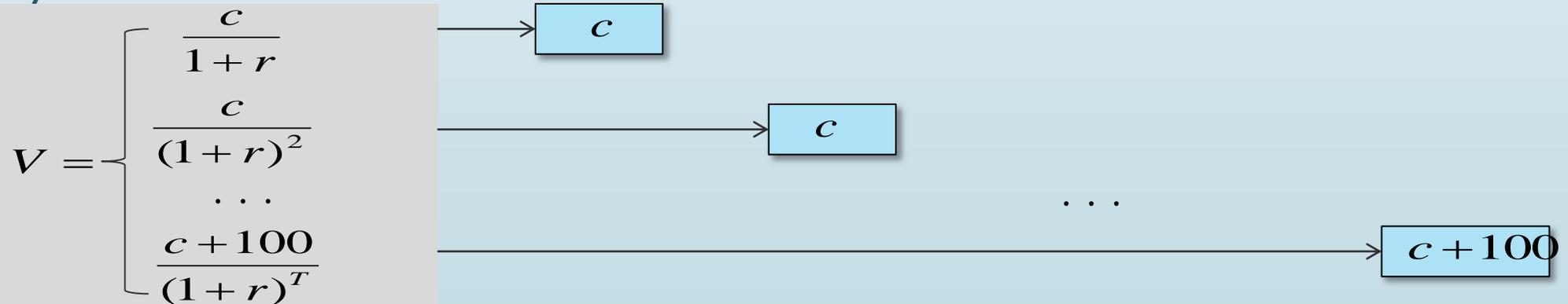
1年後には                      2年後には

(3) 逆に、1年後、  
2年後に得られる  
財産  $Y_1, Y_2$  は、  
. . .

$$\frac{Y_1}{1+r} \longleftrightarrow Y_1$$

$$\frac{Y_2}{(1+r)^2} \longleftrightarrow Y_2$$

等価と考える



# (要点) 評価価格の計算は内積で

【概要】 Cash Flowに現在時点での評価価格対応させる価格関数は線形汎関数

→Rieszの表現定理により「内積表現」できる

$R^T \ni$

金融取引



Cash Flow

(時点、状態、通貨)

↓  
金額

(線形空間)

P : 価格関数

(線形汎関数)

内積表現

評価価格

$\in R$

- 市場における価格形成か、相対での価格決定か、金融機関としての条件提示か、などで設定が異なる。  
(効用関数、製造コスト、裁定不可、市場均衡・・・)

(時間軸) 割引因子

$$p(A) = \frac{1}{1+r} \cdot a_1 + \frac{1}{(1+r)^2} \cdot a_2 + \dots + \frac{1}{(1+r)^T} \cdot a_T$$

(通貨) 為替レート

$$p(A) = 1 \cdot p_0 + f_1 \cdot p_1 + \dots + f_m \cdot p_m$$

(状態) state price

$$p(A) = q_1 \cdot c_1 + q_2 \cdot c_2 + \dots + q_n \cdot c_n$$

## (参考) 線形汎関数と内積

### 1. 内積

$R$ 上の線形空間  $L$  において、各  $(x, y) \in L \times L$  に  $R$  の値  $\langle x, y \rangle \in R$  が定まり、

$$(1) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$(2) \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in R$$

$$(3) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\text{等号は } x = 0 \text{ のときのみ})$$

を満たすとき、 $\langle \quad \rangle$  を  $L$  の内積という。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

### 2. 線形汎関数

$R$ 上の線形空間  $L$  から (1次元線形空間としての)  $R$  への線形写像  $T(x)$  を線形汎関数という

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \lambda \in R$$

### 3. 定理

線形汎関数  $T : L \rightarrow R$  に対して、

$$T(x) = \langle x, y_T \rangle$$

が成り立つようなただ一つの  $y_T \in L$  が存在する。(Rieszの表現定理)

## (参考) リスク中立確率

### 【概要】

(1) Cash Flowが発生する将来の時点  $T$  の不確実な状態の可能性は有限個とする。

$$k = 1, 2, \dots, K$$

(2) それぞれの状態が発生したときの金融取引からのCash Flowが

$$C_k \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

とすると、

(3) 金融商品の評価価格を計算するのに、

それぞれの不確実な状態に対応するリスク中立確率  $q_k$  が得られ、

無リスク金利  $r$  を用いて、評価額は以下のように計算することができる。

$$V = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=1}^K q_k \cdot C_k = D(T) \cdot E_Q[\tilde{C}(T)]$$

## (要点) 数理ファイナンスの基本定理

### <数理ファイナンスの基本定理>

一般の金融商品の評価（価格計算）について以下のことが言える。

(1) 金融市場が「裁定取引不可能」(Arbitrage Free) ならば、

■ 現実確率  $P$  と同値なリスク中立確率  $Q$  が存在して、

将来時点  $T$  でのCash Flowが  $\tilde{C}(T)$  となる金融商品の価格  $V$  は

$$V = D(T) \cdot E^Q[\tilde{C}(T)]$$

と表される。

(2) 逆にそのようなリスク中立確率  $Q$  が存在すれば、金融市場は「裁定取引不可能」である。

(3) 更に、金融市場が完備 (Complete) ※ならば、

■ そのようなリスク中立確率は唯一つ存在する。

※金融市場のすべての金融商品を「複製」することができるような金融市場のこと

(Dynamic Hedge)

## 2-3. 価格の変動要因、要因変化への感応度

### ■ 固定利付債券の例

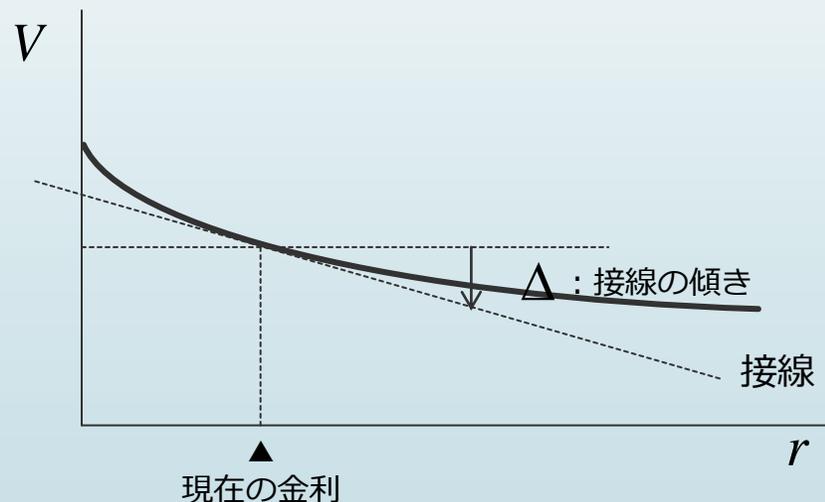
#### 1. 評価価格

市場金利  $r$  が価格変動要因 (=リスク因子)

$$V = \frac{3}{1+r} + \frac{3}{(1+r)^2} + \frac{3}{(1+r)^3} + \frac{3}{(1+r)^4} + \frac{103}{(1+r)^5} = V(r)$$

#### 2. 関数のグラフ

#### 3. 変動要因による「微分」を計算



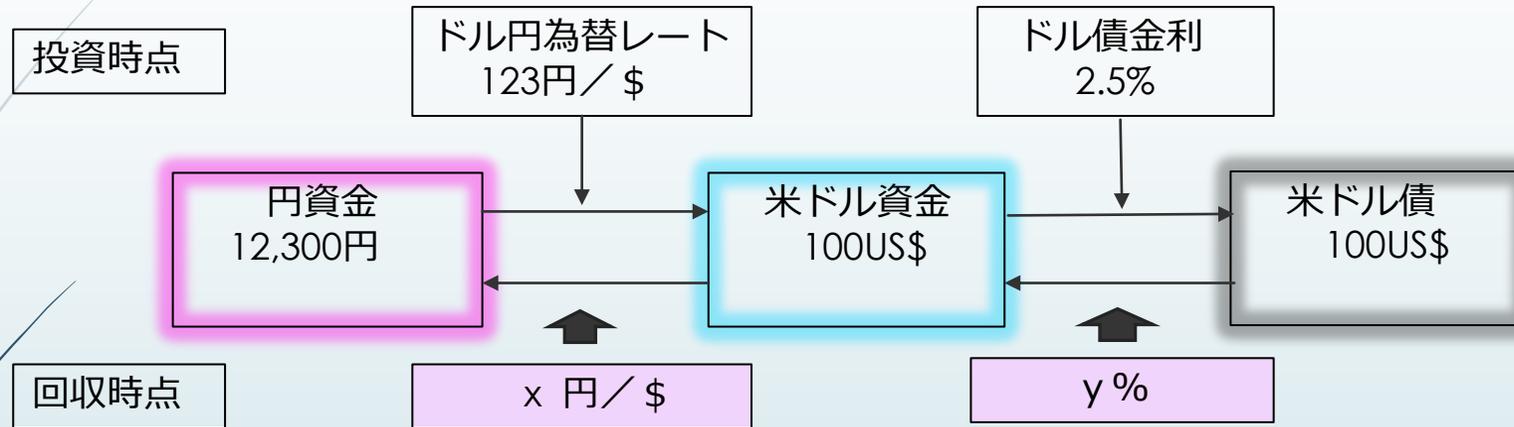
$$\frac{dV}{dr} = \frac{V(r+dr) - V(r)}{dr} = \Delta$$

$$dV = \Delta \cdot dr$$

△ は感応度と呼ばれリスク管理に使用

$$\text{価格変化幅} \doteq \text{感応度} \times \text{要因変動幅}$$

■ 複数のリスク因子を持つ金融取引の例（外債投資）



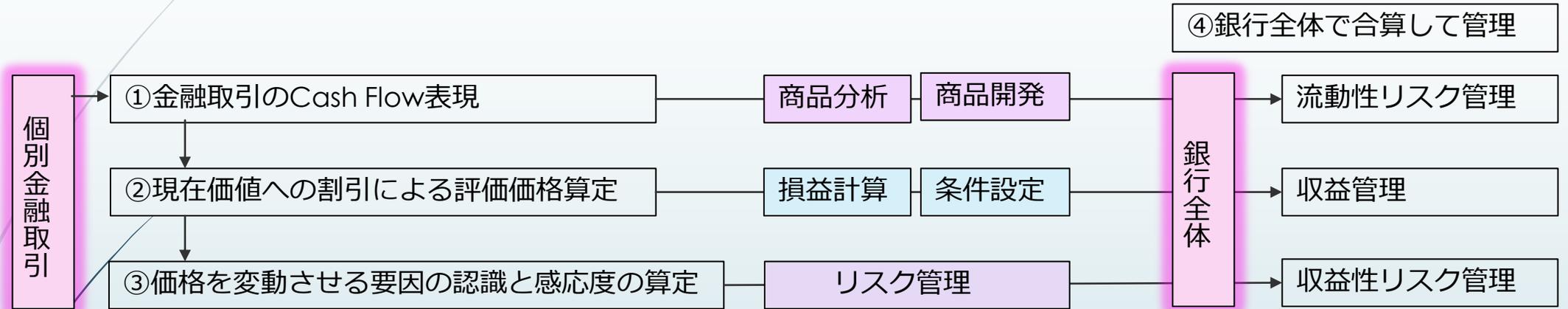
■ 回収時の円換算価値

$$V = V(x, y) = x \cdot \left( \frac{2.5}{1 + \frac{y}{100}} + \dots + \frac{102.5}{\left(1 + \frac{y}{100}\right)^T} \right)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy = \Delta_x \cdot dx + \Delta_y \cdot dy$$

## 2-4. 銀行全体で合算管理

【概要】 時間を経過させないで瞬間的にリスク因子が変化すると仮定する



< j 番目の取引 >

$$dV_j = \Delta_{j,1} \cdot dx_1 + \Delta_{j,2} \cdot dx_2 - V_j \cdot dN_j$$

(金利)

(為替)

(信用)

共通因子

個別因子

< 銀行全体 >

$$dW = \sum_j dV_j = \left( \sum_j \Delta_{j,1} \right) \cdot dx_1 + \left( \sum_j \Delta_{j,2} \right) \cdot dx_2 - \sum_j (V_j \cdot dN_j)$$

(金利)

(為替)

(信用)

0

0

ヘッジ

分散化

## 2-5. 時間経過の考慮（確率変動モデル）

(1) ここまでの議論では時間の経過なしで考えた（瞬間的な変化）

$$dW = \Delta_1 \cdot dx_1 + \Delta_2 \cdot dx_2 - \sum_j V_j \cdot dN_j$$

(2) 次に時間とともに市場要素や取引先状態が確率的に変化すると仮定する。

$$d\tilde{W}(t) = R(t) \cdot dt + \Delta_1(t) \cdot d\tilde{x}_1(t) + \Delta_2(t) \cdot d\tilde{x}_2(t) - \sum_j V_j(t) \cdot d\tilde{N}_j(t)$$

$$\tilde{W}(T) = W(0) + \int_0^T d\tilde{W}(t)$$

単位時間当たり  
利息収支－経費

$$R(t)$$

時間とともに変化する取引内容

$$\Delta_1(t), \Delta_2(t), V_j(t)$$

および市場変動、取引先の状態変動

$$d\tilde{x}_1(t), d\tilde{x}_2(t), d\tilde{N}_j(t)$$

を表す確率変動モデルを仮定

## (要点) 時間経過を伴う不確実性を確率過程で表現

### 市場変動

時点

$$t \longrightarrow t + dt$$

市場価格

$$S(t) \longrightarrow S(t) + d\tilde{S}(t)$$

$$\frac{d\tilde{S}(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot d\tilde{W}(t)$$

$d\tilde{W}(t)$  : 平均 0、標準偏差  $\sqrt{dt}$  の正規分布から発生する数値

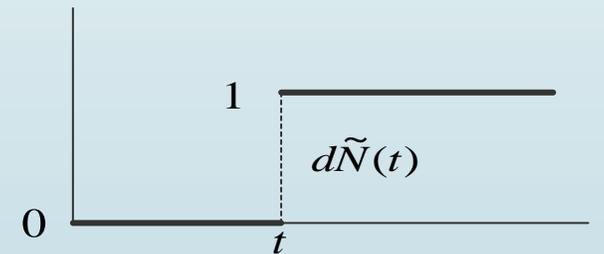
### 取引先の状態変動

時点

$$t \longrightarrow t + dt$$

取引先状態

$$0 \longrightarrow d\tilde{N}(t)$$

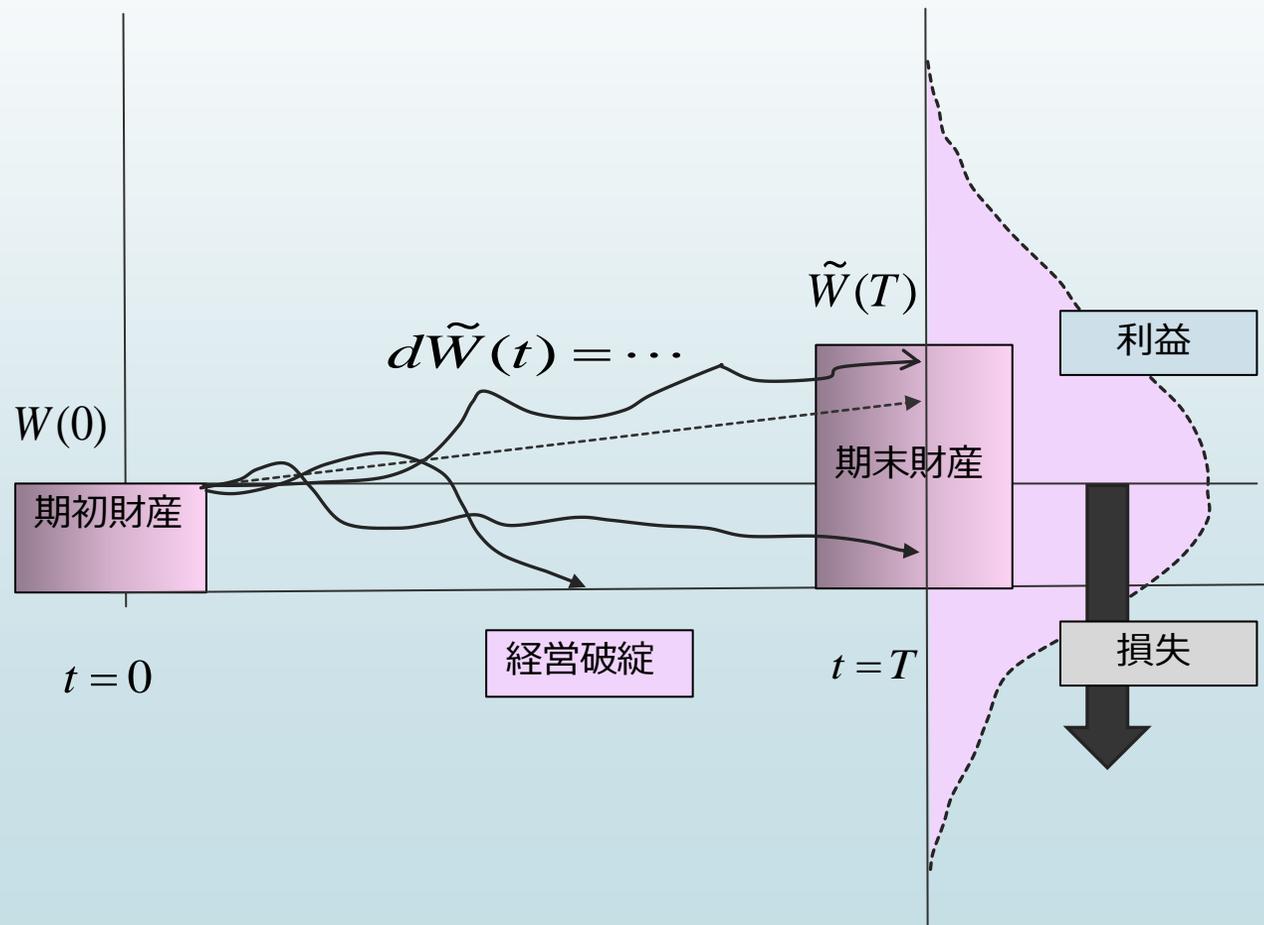


$$d\tilde{N}(t) = \begin{cases} 1 & \text{確率 } \lambda \cdot dt \\ 0 & \text{確率 } 1 - \lambda \cdot dt \end{cases}$$

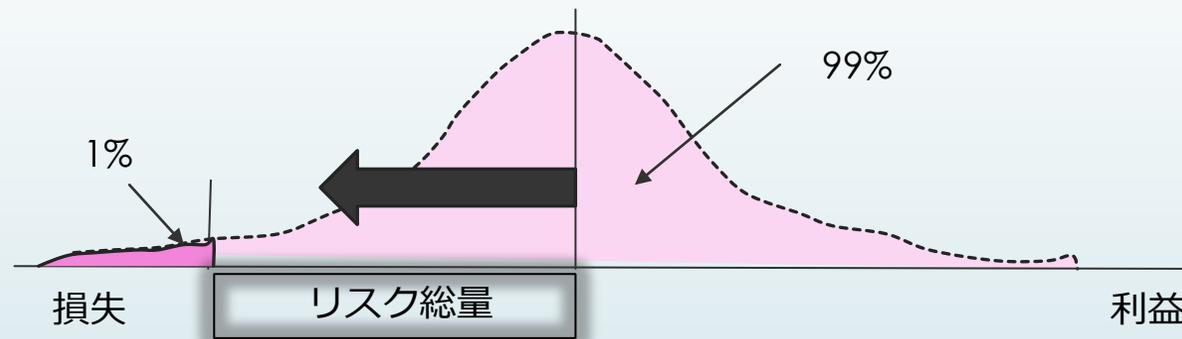
デフォルト

## 2-5. 統合リスク管理

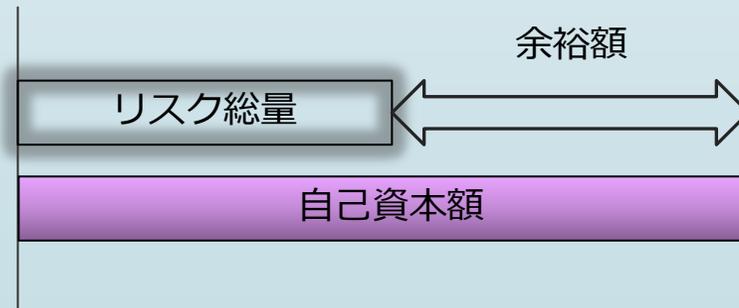
(1) 期初財産（自己資本）に価値変動が積み上がっていく



- (2) 期間（例えば1年間）に、一定の信頼度（例えば99%）で発生し得る最大の損失額を「リスク総量」と呼ぶ

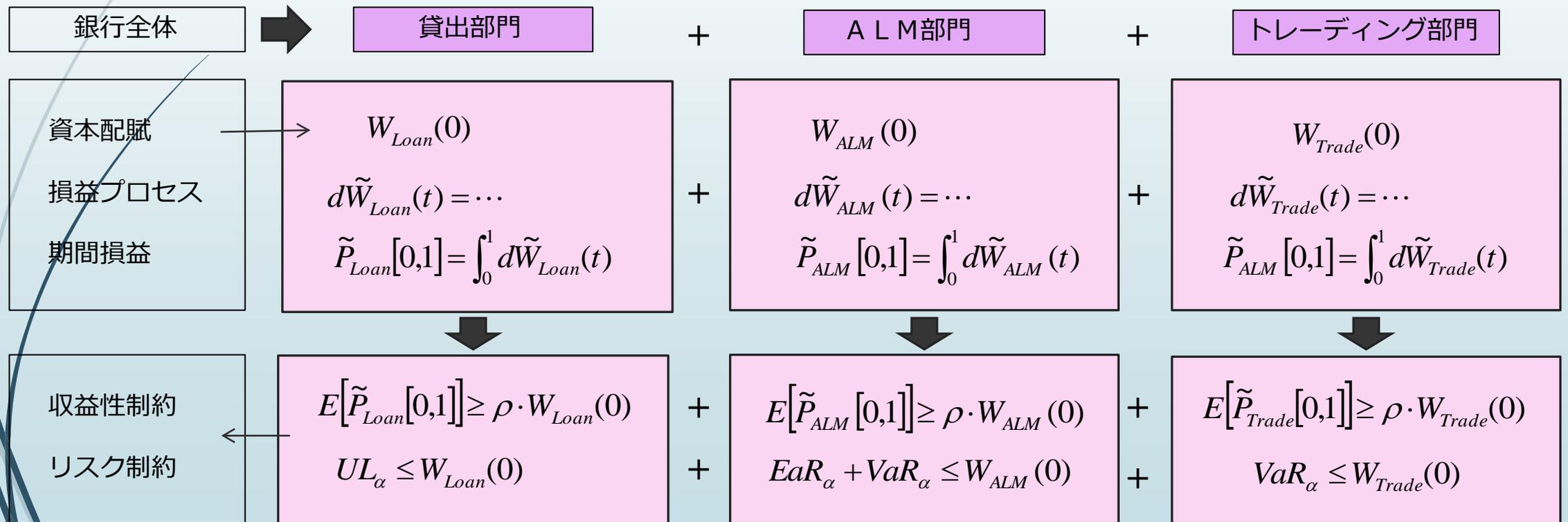


- (3) 損失発生時の処理原資となる自己資本と対比して経営破綻への安全性を確認。



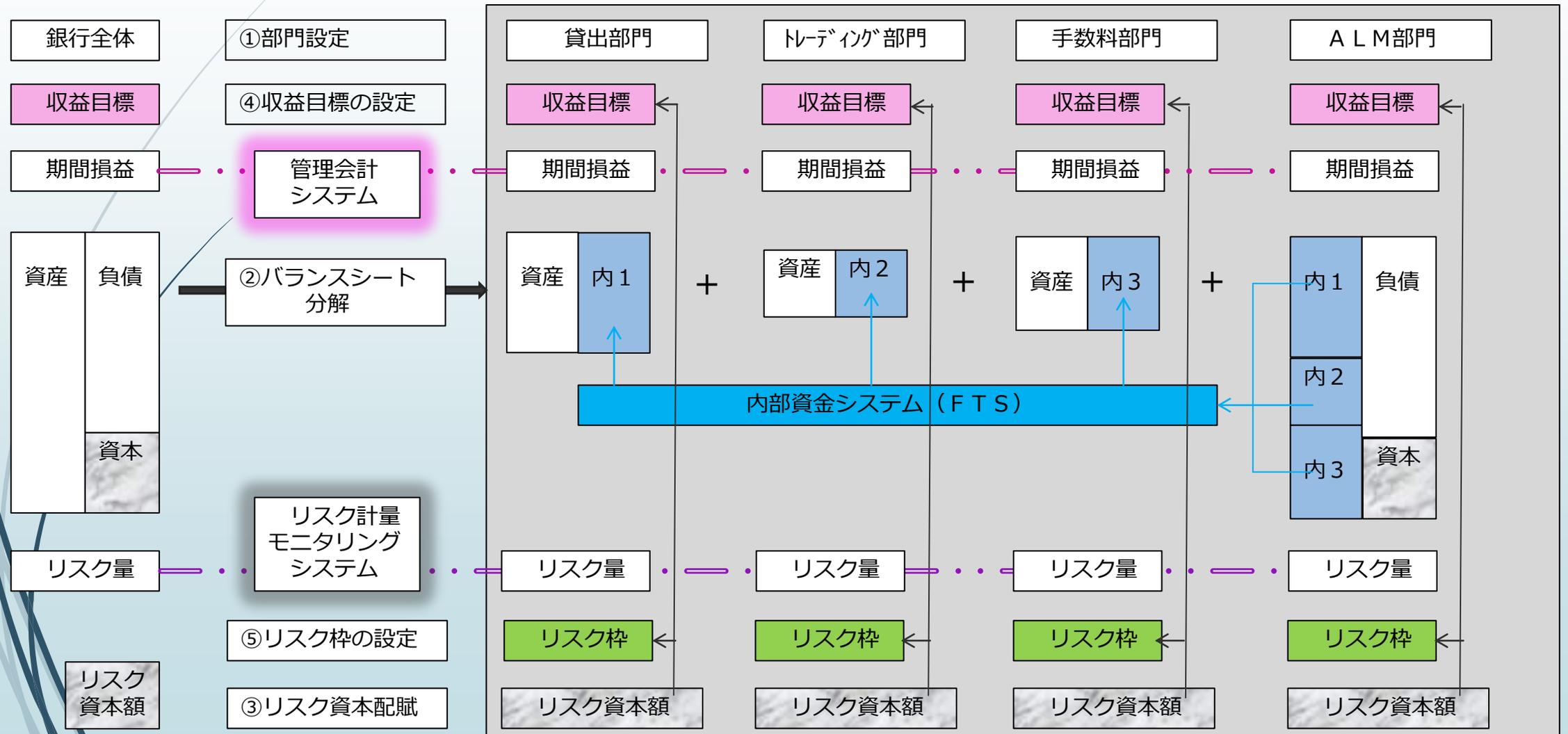
## 2-6. 統合管理から再度、部門別管理へ

- 金融リスク制御のためには、銀行全体の構造は複雑すぎる  
→内部資金システムによって「部門別管理」の仕組みを構築



## (参考) 内部資金による部門への分解

【概要】 A L M部門からの内部資金によってB / Sを分解



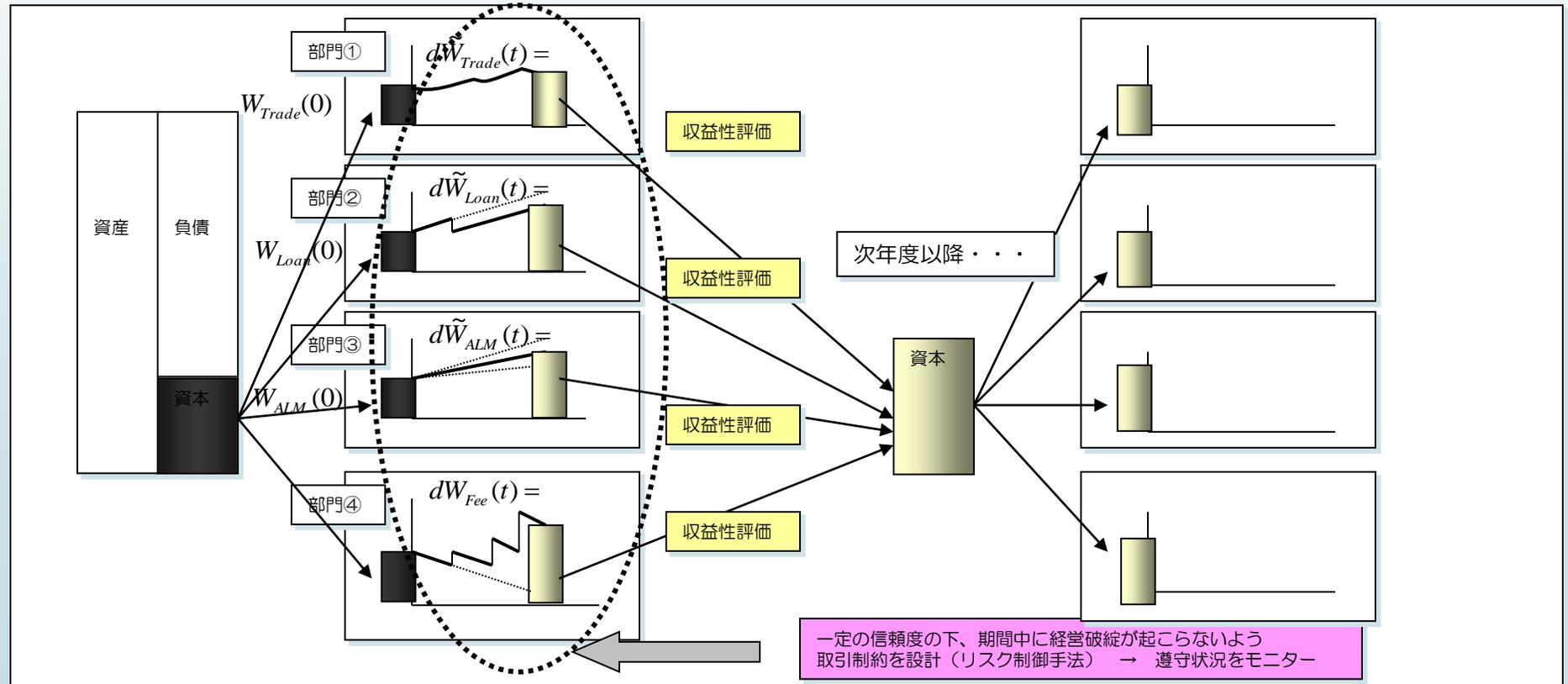
## (参考) 部門別管理による銀行経営

- 銀行は、異なる不確実性（リスク）特性を有する複数の業務の集合体。
- 期初の資本配賦によって、各業務で取れるリスクを制約しながら、収益を積み上げていく。
- 期末に清算して、収益性の評価を行う。（RAPM=Risk Adjusted Performance measurement）
- これらの一連のプロセスを、一定の信頼度の下、経営破綻が起こらないように組み立てる。

### 【課題】

- 部門間のリスク分散効果の認識
- 各部門へのリスク資本配賦の方法
- パフォーマンス評価の方法 等

＜統合的な収益・リスク管理の管理体制が必要＞



### 3. 2008年金融危機と金融工学

#### 2008年金融危機の発生

##### 【リスク管理批判】

- 金融機関では、
- (金融自由化で要請されていたはずの) 自主的なリスク管理ができていなかった
  - リスク規制 (バーゼルⅡ) が効かなかった

##### 【金融工学バッシング】

- 金融工学は金融を複雑にし過ぎた
- 金融工学は不適切に数理手法を金融に適用した

##### 【論点】

1. ランダムウォークからエコノミックサイクルへ
2. VaR (Value at Risk) の再検討
  - ストレステストの重要性
  - リスク制御手法の重要性
3. カウンターパーティーリスクの認識
  - デリバティブ (CVA)
4. 流動性リスク管理の強化
5. ゴーイングコンサーン経営と自己資本
  - 自己資本の質・量
  - 経営立て直しか破綻処理か
6. ミクロプルーフデンスからマクロプルーフデンスへ
  - G-S I F I s

自主管理の見直し

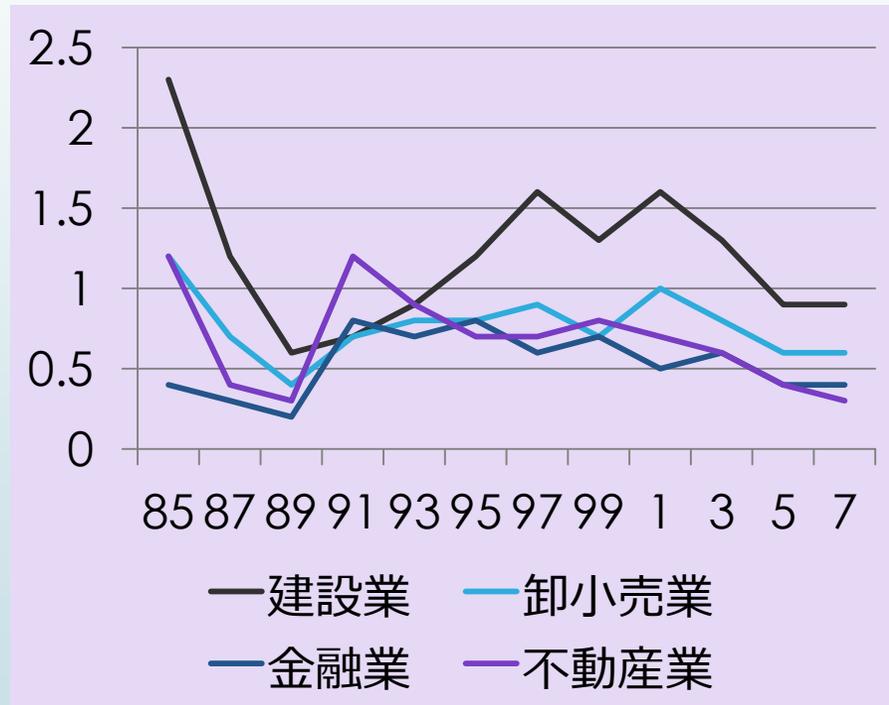
規制の見直し

商品構造の見直し

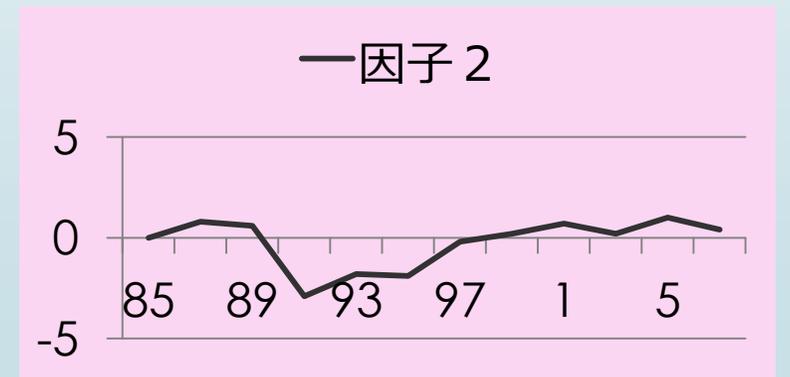
モデルの見直し

## 3-1. ランダム・ウォークから エコノミック・サイクルへ (マクロモデル)

■ 業種別デフォルト率の推移

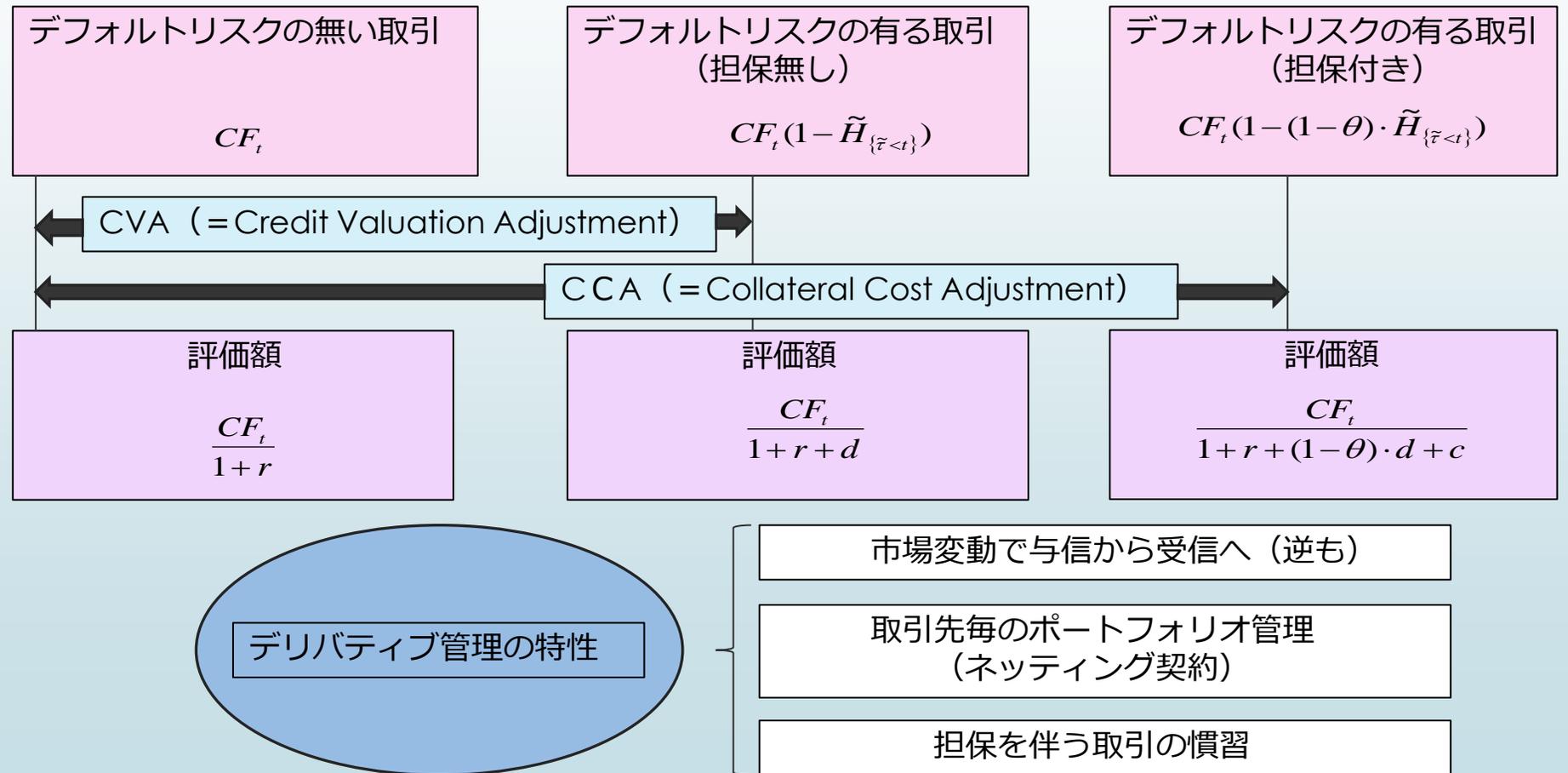


因子分析



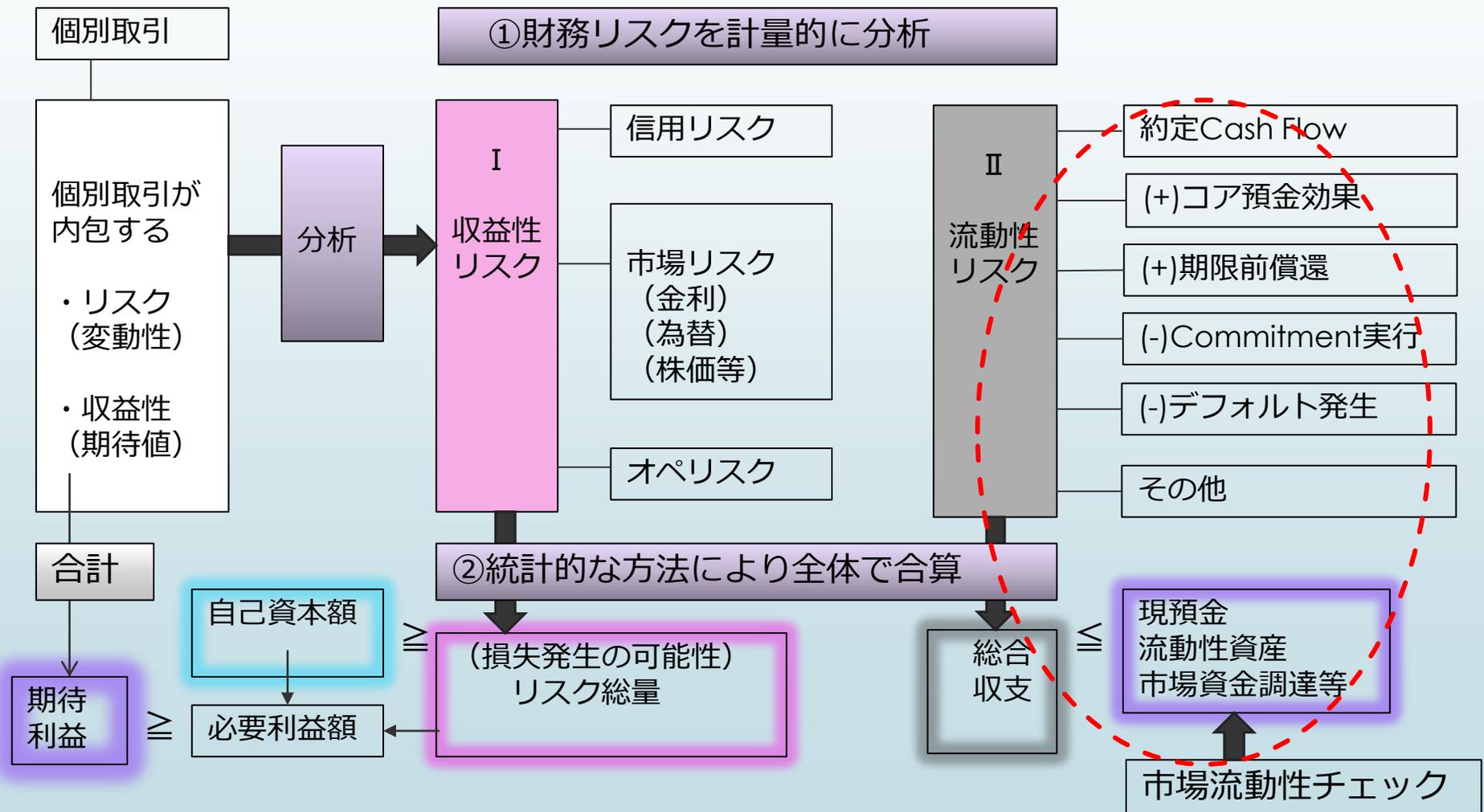
## 3-2. カウンターパーティーリスクの考慮

### ■デリバティブ取引の市場価格にカウンターパーティーリスクが反映



### 3-3. 流動性リスクの考慮

■ 金融緩和の状況下、流動性リスク管理の重要性は十分に認識されず



## 3-4. 平常時のリスク管理・ストレス時のリスク管理

### ■ 平常時のリスク管理とストレス時のリスク管理は違う

#### (平常時)

- ・ リスク許容範囲内にリスク量を制御しつつ (← VaR)、  
必要収益額を確保する (← 資本コスト率) ➡ むしろ**収益確保に主眼**

#### (ストレス時) : ストレス状態にもレベルがあるが・・

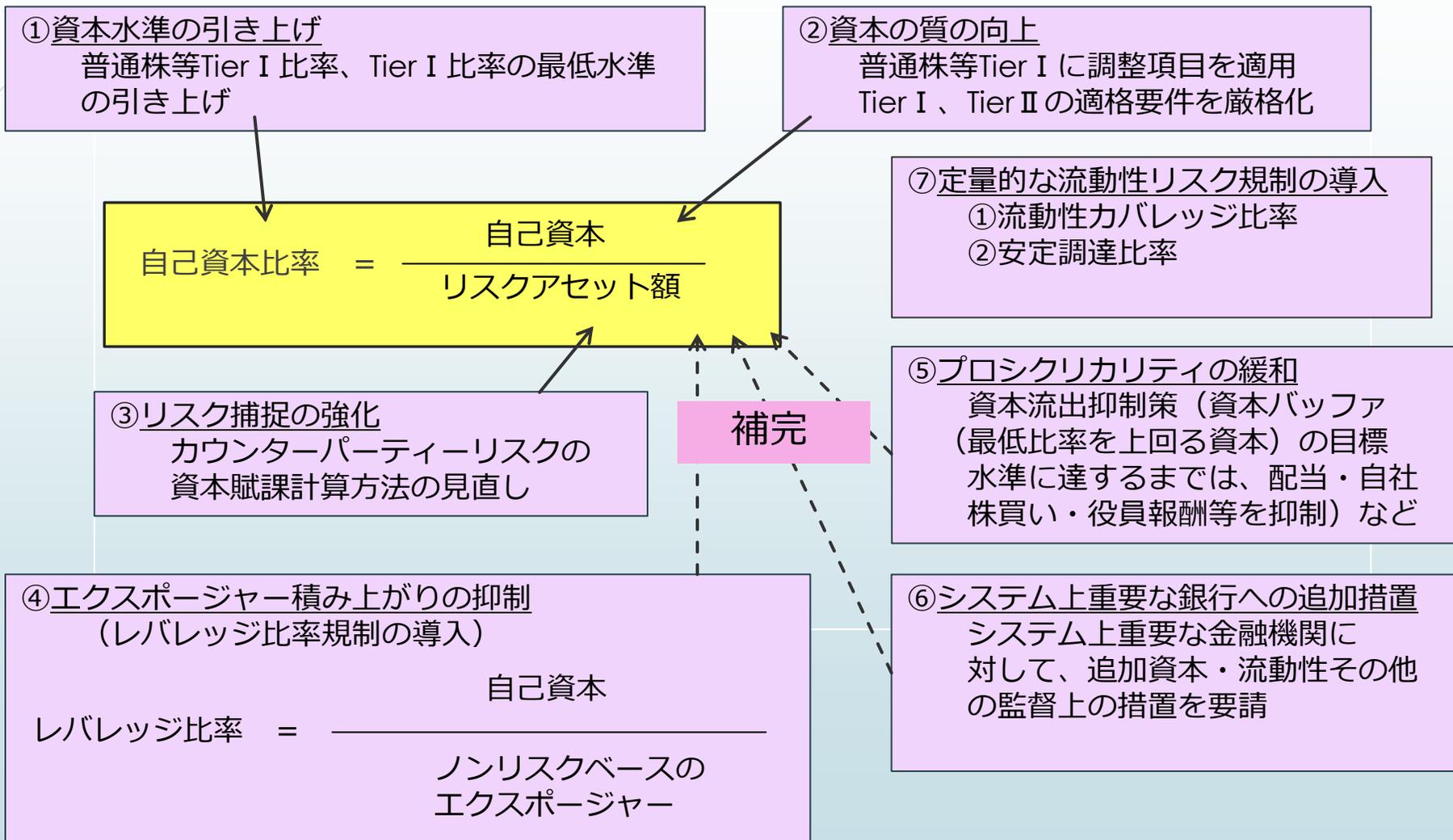
- ・ 平常時を大きく超えるリスク因子変動
- ・ リスク因子間の連動性のシフト
- ・ 市場流動性の消滅
- ・ システミックリスクの発生



- ・ 事業継続か、事業清算かの判断とアクションプランの策定 ➡ **予防・損失処理に主眼**  
→ (Recovery and Resolution Plan) : G - S I F I s

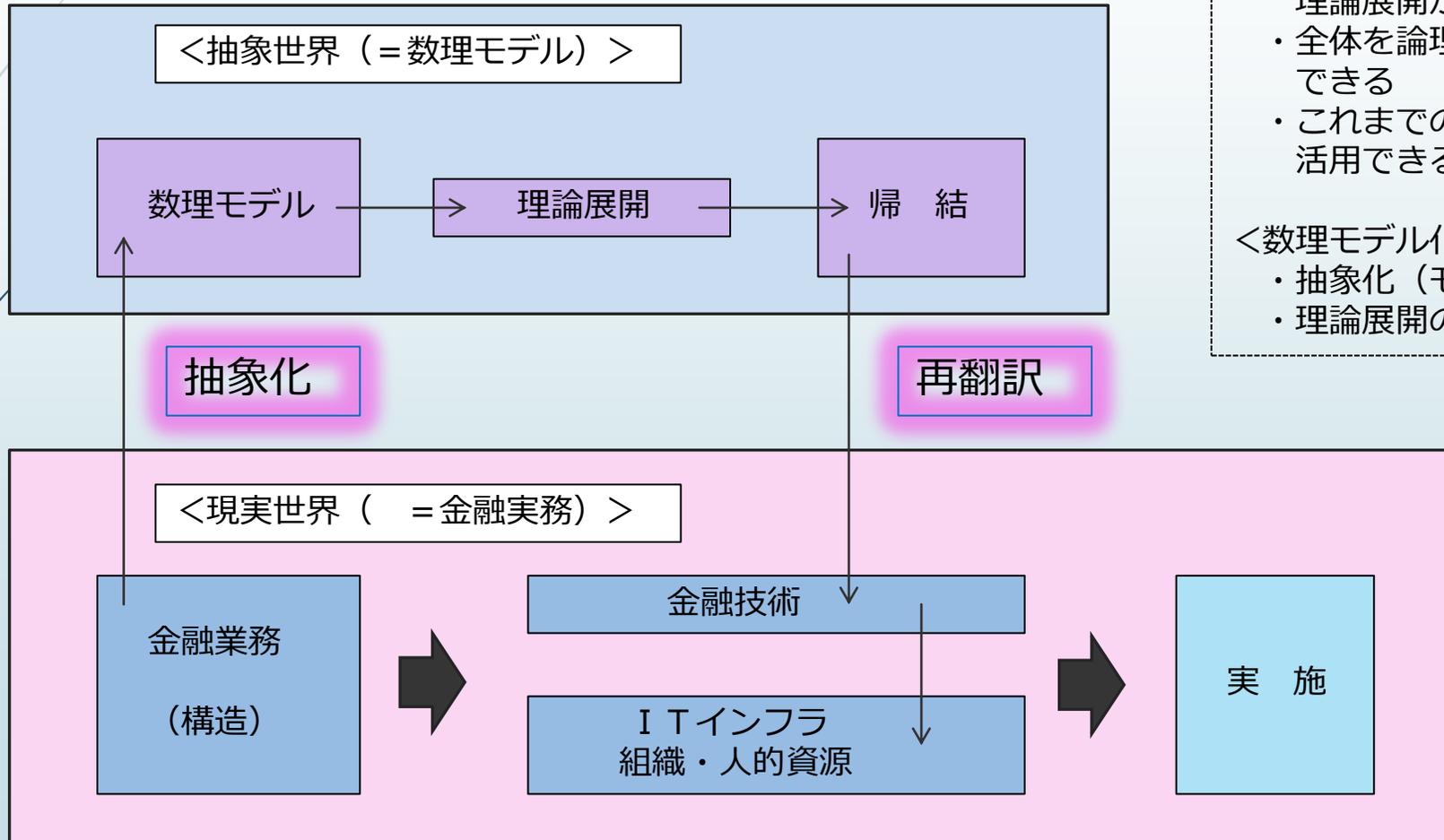
# (参考) バーゼルⅢの概要

(金融庁資料より作成)



## 4-1. 講演を終えるにあたって

【概要】金融に数理モデルを適用する場合の注意点



<数理モデル化のメリット>

- ・ 定量的に構成できる
- ・ 元の世界を忘れて、抽象的に理論展開ができる
- ・ 全体を論理的・整合的に構成できる
- ・ これまでの数理科学の成果を活用できる

<数理モデル化の注意点>

- ・ 抽象化 (モデル化) の妥当性
- ・ 理論展開の帰結の再検証

## 4-2. 金融テクノロジーの新たな動き

### 1. Wall Street Journal (日本版) 2010.7.14

・ますます多くの投資家が「**機械学習 (AI)**」によって銘柄の選択と投資タイミングの選択を行っている。・・・コンピュータ・プログラムによって膨大なデータ（財務データ・市場取引データ・ネットデータ等）を分析し、将来を予測する**人工知能 (AI)**の一部門だ。

### 2. NHKニュース「おはよう日本」 2015.5.27

・アメリカの株取引は**人工知能**が主役になろうとしている。・・・先月、アメリカでは人工知能を使い、**超高速取引**を行う会社が上場し、注目を集めた。1日に行う取引は530万件としている。

・このような取引はアメリカが行う取引の半分を占めている。・・・相手が人工知能取引をしている場合、相手や取引所よりも実行が更に高速ならば、注文を意図的にキャンセルし、それに対する市場のリアクションを読んで再発注して利益を上げることができる。

・しかし、このような状況は不可解でコントロール不能のフィードバックのループともなる。2010年5月6日に、ダウ・ジョーンズ工業株平均は「**フラッシュ・クラッシュ**」と呼ばれる説明のつかない大幅下落を引き起こした。・・・

## (続き)

### 3. ニューズウィーク誌 (日本版) 2014.6.10

- ・ ・ 米国財務省テロリズム・金融情報局 (T F I) は、ロシア軍のクリミア侵攻を受けて、プーチン派の金融取引を麻痺させるべく「制裁リスト」を作成、制裁対象の資金繰りに打撃を与えた。サンクトペテルブルクの中規模銀行でロシア要人を顧客に持つ「バンク・ロシア」では、ビザカード、マスターカードの**クレジット決済が突然停止**され、また S & P は同行の**信用格付を引き下げた**。
- ・ ・ 最先端のコンピュータ・システムを備えた大手金融会社ならば、ブラックリストを銀行内のチェックリストに組み込んで、該当取引の洗い出しを数分以内に開始することができる。
- ・ ・ 米国財務省が「金融取引のグローバル化」と、ドルを背景にした「米国金融による世界支配」をうまく利用した結果だといえる。

(日本のコラム)

**今日の戦場**は、前世紀からの「陸」「海」「空」「宇宙」に続き、2007年にエストニアが受けた大規模な攻撃に代表される「サイバー空間」、そして今回の米国による「**金融**」に広がっている。