絡み目のミルナー不変量とHOMFLYPT多項式

安原　晃　(東京学芸大学・教育学部)*

概　要

For an ordered, oriented link in the 3-sphere, J. Milnor defined a family of invariants, known as Milnor $\overline{\mu}$-invariants. For an n-component link, Milnor invariant is specified by a sequence of numbers in $\{1, 2, \ldots, n\}$ and the length of the sequence is called the length of the Milnor invariant. We give formulas expressing $\overline{\mu}$-invariants of an n-component link in terms of the HOMFLYPT polynomial as follows. If all $\overline{\mu}$-invariant of length $\leq k$ vanish, then any $\overline{\mu}$-invariant of length between 3 and $2k+1$ can be represented as a combination of HOMFLYPT polynomial of knots obtained from the link by certain band sum operations. In particular, the Milnor invariants of length $k+1$ can be always represented as such a *linear* combination. While the formula does not hold for length $2k+2$, by adding correction terms, we give a formula for the $\overline{\mu}$-invariants of length $2k+2$. The correction terms can be given by a combination of HOMFLYPT polynomial of knots determined by $\overline{\mu}$-invariants of length $k+1$. In particular, for any 4-component link the $\overline{\mu}$-invariants of length 4 are given by our formula, since all $\overline{\mu}$-invariants of length 1 vanish.

This talk is based on two joint works with Jean-Baptiste Meilhan and Yuka Kotorii.

1. ミルナー不変量

この節では，ミルナー不変量の定義を述べた後，知られている性質をいくつか挙げ，最後に，ミルナー不変量の計算方法をかいつまんで説明する．

1.1. 定義

3次元球面S^3内のn成分有向絡み目Lに対し，Lの補空間$S^3 \setminus L$の基本群をGとする．(以後，絡み目は全て有向であるものとする．) G_qをGの降中心列のq番目の部分群とする．つまり，$G_1 = G$であり， $G_q = [G, G_{q-1}]$ $(q \geq 2)$は$\{aba^{-1}b^{-1} \mid a \in G,\ b \in G_{q-1}\}$で生成される$G$の（正規）部分群である．このとき，剰余群$G/G_q$は，$n$個の元$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$で生成生成されることが知られている[3], [17]．

したがって，Lの第j成分K_jとパラレルな$S^3 \setminus L$内の閉曲線が表すG/G_qの元λ_j^qは，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$で表される$(j = 1, 2, \ldots, n)$．ここで，$\lambda_j^q$の**マグナス展開**$E(\lambda_j^q)$をとる．つまり，$E(\lambda_j^q)$は，

$$E(\alpha_i) = 1 + X_i,\ E(\alpha_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \cdots \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で与えられる非可換なn変数の形式的ベキ級数とする．集合$\{1, 2, \ldots, n\}$の元を項とする長さq以下の数列$I = i_1 i_2 ... i_{k-1} j$に対し，$E(\lambda_j^q)$における$X_{i_1} ... X_{i_{k-1}}$の係数を$\mu_L(I)$

本研究の一部は科研費基盤研究（C）(課題番号:23540074) の助成を受けたものである．
* 〒184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1　東京学芸大学・教育学部
e-mail: yasuhara@u-gakugei.ac.jp
web: http://www.u-gakugei.ac.jp/~yasuhara/

と表す．（ただし，$\mu_L(j) = 0$ と定める．）ここで得られた $\mu_L(I)$ は，各 λ_j^q の表示の仕方に依存して決まるので，一般には絡み目 L の不変量にはならない．

そこで，

$$\Delta_L(I) = \gcd\left\{\mu_L(J) \,\middle|\, \begin{array}{l} J\text{ は }I\text{ から少なくとも }1\text{ つの項を取り除き} \\ \text{残りを巡回させて得られる数列} \end{array}\right\}$$

とし，$\mu_L(I)$ の $\Delta_L(I)$ を法とする剰余類 $\overline{\mu}_L(I)$ をとることにより，絡み目の不変量を得る．これをミルナーの $\overline{\mu}$ 不変量と呼ぶ．また，数列 I の長さをミルナー不変量の長さと呼ぶ．ミルナー不変量は q にも依存するように見えるが，長さ q 以下のミルナー不変量は，$G/G_{q'}$ $(q' > q)$ で得られるものと一致することが知られている．つまり，数列の長さに合わせて q を決めれば，ミルナー不変量が q に依らずに定まる．

1.2. ミルナー不変量の性質

ミルナー不変量に関して，知られている性質を幾つか紹介する．

(1) n 成分絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ と数列 I に対し，$\overline{\mu}_L(I) = \overline{\mu}_{\bigcup_{i\in\{I\}} K_i}(I)$ が成立する．ここで，$\{I\}$ は数列 I に含まれる整数全体の集合とする．したがって，数列に現れない整数を添字にもつ絡み目の成分は無視できる．

(2) 長さ 2 のミルナー不変量 $\overline{\mu}_L(ij)$ は，L の第 i 成分 K_i と第 j 成分 K_j の絡み数 $\mathrm{lk}(K_i, K_j)$ である．このことから，ミルナー不変量は高次の絡み数とも呼ばれている．

(3) (J. Milnor[17], A. J. Casson[2]) ミルナー不変量は，絡み目のイソトピー不変量であり [17]，かつ，コボルディズム不変量である [2]．

(4) (K. Habiro[8]) 長さ k 以下のミルナー不変量は，C_k 同値不変量である．ここで，C_k 同値とは，葉廣氏 [8] によって定義された絡み目の局所変形（C_k 変形）で生成される絡み目の同値関係である．

(5) (J. Milnor[16]) 数列 I に同じ数が含まれない場合は，$\overline{\mu}(I)$ はリンクホモトピー不変量になる．ここでリンクホモトピーとは，同じ成分間の交差交換から生成される絡み目の同値関係である．また，L が自明な絡み目にリンクホモトピックである為の必要十分条件は，繰り返しのない任意の数列 I に対し，$\overline{\mu}_L(I) = 0$ となることである．

(6) (T. Fleming and Y[6], Y[23]) 数列 I に同じ数が高々 k 個しか含まれない場合は，$\overline{\mu}(I)$ は，自己 C_k 同値不変量になる [6]．ここで，自己 C_k 同値とは，同じ成分間の C_k 変形から生成される絡み目の同値関係であり，特に自己 C_1 同値は，リンクホモトピーと一致する．また，絡み目 L が自明な絡み目に自己 C_2 同値である為の必要十分条件は，同じ数が高々 2 回しか現れない任意の数列 I に対し，$\overline{\mu}_L(I) = 0$ となることである [23]．

(7) (J. Milnor[17]) n 成分絡み目 L 対し，L の成分のパラレル・コピーを幾つか L に加えて得られる m 成分絡み目を L' とする．更に，L' の第 i 成分は，L の第 $h(i)$ 成分に対応しているものとする．このとき，$\overline{\mu}_{L'}(i_1, \ldots, i_r) = \overline{\mu}_L(h(i_1), \ldots, h(i_r))$ が

成立する．これにより，繰り返しのある数列に関するLのミルナー不変量は，Lの成分のパラレル・コピーをLに適当に加えてできる絡み目L'のミルナーのリンク・ホモトピー不変量で与えられることがわかる．

(8) 絡み目Lが**境界絡み目**，つまり，各成分が互いに交わらない有向曲面の境界になっているとき，Lのミルナー不変量は全て0である．

(9) ミルナー不変量は，長さ2の場合を除き，**有限型不変量**にはならない．

(10) etc.......

1.3. ミルナー不変量の計算方法

ここでは，ミルナー不変量を計算するときに必要なλ_i^qを求め方について，かいつまんで説明する．これは，Milnorの論文[17]の中で述べられている方法であるが，説明しやすいように多少表現を変えている．

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$を$n$成分絡み目の**正則表示**とする．

◇ 各成分K_i上に1点p_iを選び固定する．p_iからK_iの向きに沿ってK_iを1周し，通過した順に各弧にラベル$a_{i1}, \ldots, a_{ir_i}$をつける．ここで，r_iはK_iの孤の総数である．

◇ $u_l \in \{a_{jk} \mid 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq r_j\}$を弧$a_{il}$と弧$a_{i(l+1)}$の間のラベルとする．このとき，$a_{il}, a_{i(l+1)}, u_l$からなる交差点の符号を$\varepsilon(l) \in \{-1, 1\}$とする．

そこで，

$$l_i = u_1^{\varepsilon(1)} u_2^{\varepsilon(2)} \cdots u_{r_i}^{\varepsilon(r_i)}, \qquad l_i[j] = u_1^{\varepsilon(1)} \cdots u_{j-1}^{\varepsilon(j-1)}$$

と置く．(明らかに$l_i = l_i[r_i+1]$である．また，$l_i[j]$はK_iをa_{i1}からa_{ij}まで辿ったとき通過する上交差のラベルを符号付きで読み取ったものである．)

次に，写像fを以下で定義する．

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} (l_i[j])^{-1} a_{i1} (l_i[j]) & (j \geq 2) \\ a_{i1} & (j = 1). \end{cases}$$

また，a_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r_i)$で生成される自由群から$\alpha_1, ..., \alpha_n$で生成される自由群$F(n)$への準同型$g$を$g(a_{ij}) = \alpha_i$で定める．

このとき，$\lambda_i^q (q \geq 2)$は，

$$\lambda_i^q = \alpha_i^{-w_i} g \circ f^{q-1}(l_i)$$

で得られる．ただし，w_iは$g(l_i)$におけるα_iの次数であり，f^{q-1}はfを$q-1$回繰り返した合成写像とする．

注 1.1 (J. Milnor[17]) 剰余群G/G_qは以下の表示を持つ．

$$G/G_q \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid \alpha_1 \lambda_1^q \alpha_1^{-1} (\lambda_1^q)^{-1}, \ldots, \alpha_n \lambda_n^q \alpha_n^{-1} (\lambda_n^q)^{-1}, (F(n))_q \rangle$$

注 1.2 ミルナー不変量は，絡み目の正則表示から “理論上” は簡単に計算できる．しかしながら，実際に計算しようとすると，λ_i^q の文字列の長さは，q に関して指数関数的に大きくなる．さらに，そこからマグナス展開することで，計算量は莫大なものになる．したがって，何の工夫もしなければ，コンピューターを用いてさえ計算することは不可能である．学習院大学の久保山哲二氏，九州工業大学の坂本比呂志氏と高畠嘉将氏は，ミルナー不変量を計算する過程で現れる長い文字列に，繰り返しが多いことに注目し，その繰り返しで文字列を “たたむ” ことにより，(絡み目の複雑さにもよるが) $q = 16$ 程度までは十分に計算できるプログラムの開発に成功した．

2. ミルナー不変量とアレキサンダー多項式

アレキサンダー多項式は，絡み目の補空間の基本群から得られる．したがって，ミルナー不変量と深い関連があると考えるのは自然である．実際，いろいろな研究成果が報告されている．それらの中から幾つかの結果を紹介する．ここで，n 成分絡み目の n 変数アレキサンダー多項式を $A_L(x_1, ..., x_n)$[1] と表すことにする．

定理 2.1 (K. Murasugi[18], N. Smythe[20], L. Traldi[21]) L を 2 成分の絡み目とする．数列 $[p+1, q+1] = 1, ..., 1, 2, ..., 2$ （ここで，1 は $p+1$ 個，2 は $q+1$ 個）に対し，次が成立する．

$$(-1)^q \frac{1}{p!q!}\left(\left.\frac{d^{p+q}A_L(x,y)}{dx^p dy^q}\right|_{x=y=1}\right) \equiv -\overline{\mu}_L([p+1,q+1]) \mod \Delta_L([p+1,q+1])$$

注 2.1 $1, 2$ を項とする数列は，必ずしも $[p+1, q+1]$ という型のものだけではないので，この定理で与えられる 2 成分絡み目のミルナー不変量は，ごく限られたものである．

定理 2.2 (K. Murasugi[18]) 3 成分の絡み目 L に対し，次が成立する．

$$\begin{aligned}\pm\left(\left.\frac{d^3A_L(x,y,z)}{dxdydz}\right|_{x=y=z=1}\right) \equiv\ & \overline{\mu}_L(123)^2 + \overline{\mu}_L(112)\overline{\mu}_L(233) \\ & -\overline{\mu}_L(113)\overline{\mu}_L(223) - \overline{\mu}_L(122)\overline{\mu}_L(133) \mod \Delta_L(123).\end{aligned}$$

更に，$\Delta(123) = 0$，すなわち $\overline{\mu}_L(ij) = 0\ (1 \le i < j \le 3)$ の場合は，次が成立する．

$$\pm\left(\left.\frac{d^3A_L(x,y,z)}{dxdydz}\right|_{x=y=z=1}\right) \equiv \overline{\mu}_L(123)^2.$$

以上の定理は，特殊なミルナー不変量はアレキサンダー多項式の係数から得られることを意味している．次に紹介する定理では，アレキサンダー多項式のある係数はミルナー不変量の組み合わせで与えられることを主張している．

定理 2.3 （L. Traldi[22], J. Levine [13]) n 成分絡み目 L の長さ $k-1$ 以下のミルナー不変量が全て自明である（つまり，長さ k のミルナー不変量が整数値を取る）とき，$A_L(x_1, \ldots, x_n)$ の $x_1 = \cdots = x_n = 1$ におけるテイラー展開は，次数 $(k-1)(n-1)-1$

[1] Conway が potential function を定義したときに用いたもの

未満の項を含まない．更に次数 $(k-1)(n-1)-1$ の項は，$\det(a_{ij})/(x_i-1)$ に等しい．ここで $k\geq 3$ の場合

$$a_{ij}=(x_i-1)\sum_{i_1,\dots,i_{k-2}}\overline{\mu}_L(i_1,\dots,i_{k-2},j,i)(x_{i1}-1)\cdots(x_{i_{k-2}}-1)\quad(1\leq i,j\leq n-1)$$

であり，$k=2$ の場合

$$a_{ij}=\begin{cases}-\overline{\mu}_L(ij)(x_j-1) & (i\neq j)\\ -\sum_{r\neq i}\overline{\mu}_L(ir)(x_r-1) & (i=j)\end{cases}$$

である．

注 2.2 この定理から，ミルナー不変量が自明ならば，アレキサンダー不変量も自明であることがわかる．この逆は，一般に成立せず，アレキサンダー多項式（ばかりでなくアレキサンダー加群）が自明であるが，ミルナー不変量が非自明である例が知られている [5]．

コンウェイ多項式とミルナー不変量に関しても，上で紹介した定理と同様の結果 ([8],[4],[12],[13]) が知られているが，コンウェイ多項式はアレキサンダー多項式の特別な場合であるので，ここでの紹介は省く．

3. ミルナー不変量と HOMFLYPT 多項式

講演者は，Meilhan 氏との共同研究 [15] と小鳥居氏との共同研究 [11] で，ミルナー不変量を HOMFLYPT 多項式を用いて表すことを試みた．その結果，長さ k 以下のミルナー不変量が消えている絡み目に対し，長さ $2k+2$ までのミルナー不変量を HOMHLYPT 多項式を用いて表すことに成功した．

3.1. HOMFLYPT 多項式

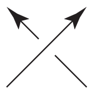
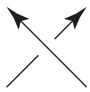
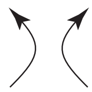
ここでは，HOMFLYPT 多項式の定義と，結果の主張に必要な幾つか性質について述べる．

絡み目 L の *HOMFLYPT* **多項式** $P(L;t,z)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1},z^{\pm1}]$ は，以下の 2 つの規則で定まる絡み目の不変量である．

(i) $P(U;t,z)=1$,

(ii) $t^{-1}P(L_+;t,z)-tP(L_-;t,z)=zP(L_0;t,z)$,

ここで，U は自明な結び目であり，L_+, L_-, L_0 はある 3 次元球体の外側では一致し，内側では以下のように異なる絡み目である．

$L_+=$  ;　$L_+=$  ;　$L_+=$  .

r 成分絡み目 L の HOMFLYPT 多項式は，z についてまとめると，次のような形

$$P(L;t,z)=\sum_{k=1}^{N}P_{2k-1-r}(L;t)z^{2k-1-r}$$

に表すことができる．このとき，$P_{2k-1-r}(L;t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を L の $(2k-1-r)$ 番目の係数多項式と呼ぶ．$P_m(L;t)$ の $t=1$ における，l 階微分を $P_m^{(l)}(L)$ とかくことにする．我々の結果では，L が結び目の場合の $P_0^{(l)}(L)$ を必要とする．

注 3.1 (T. Kanenobu and Y. Miyazawa[10]) $P_m^{(l)}$ は次数 $m+l$ の有限型不変量である．特に，$P_0^{(l)}$ は次数 l の有限型不変量である．したがって，$P_0^{(l)}$ は C_{l+1} 同値の不変量である．

HOMFLYPT 多項式は結び目の連結和の下で乗法的になることが良く知られている．特に，最低次の係数多項式である P_0 は乗法的である．このことから，任意の自然数 n と任意の結び目 K，K' に対して，

$$P_0^{(n)}(K\sharp K') = P_0^{(n)}(K) + P_0^{(n)}(K') + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P_0^{(k)}(K) P_0^{(n-k)}(K')$$

が成立する [2]．$P_0^{(k)}$ は C_{k+1} 同値の不変量なので，もし K が自明な結び目と C_n 同値ならば，

$$P_0^{(n)}(K\sharp K') = P_0^{(n)}(K) + P_0^{(n)}(K')$$

が成立する．

$\log P_0(K;t)$ の $t=1$ における n 階微分を $(\log P_0(K))^{(n)}$ と表すことにする．P_0 が乗法的であることから，$(\log P_0(K))^{(n)}$ は結び目の連結和の下で加法的になる．つまり，任意の自然数 n と任意の結び目 K，K' に対して，

$$(\log P_0(K\sharp K'))^{(n)} = (\log P_0(K))^{(n)} + (\log P_0(K'))^{(n)}$$

が成立する．

また，実際に微分すると

$$(\log P_0(K))^{(n)} = P_0^{(n)}(K) + \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} n_{(k_1,\ldots,k_m)} P_0^{(k_1)}(K) \cdots P_0^{(k_m)}(K)$$

となることがわかる．ここで，右辺の和は $k_1+\cdots+k_m=n$ を満たす全ての $k_1,\ldots,k_m$ に関して足し合わせたものであり，$n_{(k_1,\ldots,k_m)}$ はある整数を意味する．更に，$(\log P_0(K))^{(n)}$ は次数 n の有限型不変量であることもわかる．

注 3.2 $(\log P_0(K))^{(n)}$ が加法的な有限型不変量であるという事実は，次節で結果を述べる際には必要のない情報であるが，結果が成立する為には本質的な性質である．

3.2. 主結果

本講演の主結果について述べる．煩雑さを避けるために，ここではミルナーのリンク・ホモトピー不変量，つまり，繰り返しのない数列に対するミルナー不変量に関する結果のみを紹介する．

$L=\bigcup_{i=1}^n L_i$ を S^3 内の n 成分絡み目とし，$I=i_1 i_2 \ldots i_m$ を m 個の異なる整数からなる $\{1,\ldots,n\}$ 内の数列とする．B_I を向きづけられた $2m$ 角形，p_j $(j=1,\ldots,m)$ を m 本の互いに素な ∂B_I の辺で，添字は ∂B_I の向きに沿って順に付けられたものとする．更に，B_I は次 2 つの条件を満たすように S^3 内に埋め込まれているものとする．

[2] 任意の結び目 K に対し，$P_0(K;t)$ は，$P_0(K;1)=1$ となる t のローラン多項式である

(i) $B_I \cap L = \bigcup_{j=1}^m p_j$.

(ii) 各 p_j は L_{i_j} に含まれ，p_j と L_{i_j} の向きは逆になっている．

このとき，B_I を L の I **融合円盤**と呼ぶ．また，I の任意の部分列 J に対し，結び目 L_J を $\left((\bigcup_{i\in\{J\}} L_i) \cup \partial B_I\right) \setminus \left((\bigcup_{i\in\{J\}} L_i) \cap B_I\right)$ の閉包として定義する．

定理 3.1 (J. B. Meilhan and Y[15]) L を n 成分絡み目 $(n \geq 3)$ で，長さ k 以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て 0 であるものとする．このとき，$m+1$ 個の異なる自然数からなる任意の数列 I $(3 \leq m+1 \leq 2k+1)$ と任意の I 融合円盤に対し，次が成立する．

$$\overline{\mu}_L(I) \equiv \frac{-1}{m!2^m} \sum_{J<I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(m)} \pmod{\Delta_L(I)}.$$

ここで，$J < I$ は J が I の部分列であることを意味し，右辺の和は I の全ての部分列 J に関して足し合わせるものとする．また，$|J|$ は部分列 J の長さとする．

この結果は，M. Polyak[19] による長さ 3 のミルナー不変量 $\overline{\mu}(123)$ の結果をを大幅に拡張した結果になっている．

定理 3.1 において，ミルナーのリンク・ホモトピー不変量が消えているという条件は本質的である．実際，長さ k 以下が消えている場合に，長さ $2k+2$ のミルナー不変量は，定理 3.1 と同じ公式では得られないことが，次の例からわかる．

例 3.1 ([15]) L を 2 つのホップ絡み目の分離和からなる 4 成分の絡み目で，第 1 成分と第 2 成分，第 3 成分と第 4 成分がホップ絡み目であるものとする．長さ 1 以下のミルナー不変量が消えているのは定義から明らかなので，長さ $4(= 2\times 1+2)$ のミルナー不変量に関して考察する．

数列 $I = 1324$ に対し，$\Delta(I) = 1$ であるので，$\overline{\mu}_L(I) = 0$ である．一方，I 融合円盤

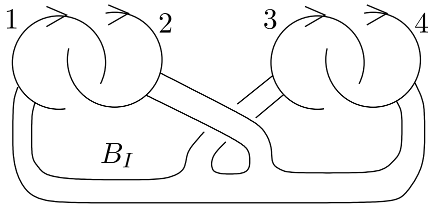


図 1: $L \cup B_I$

B_I を図 1 の様にとると，

$$P_0(L_J) = \begin{cases} 2t^2 - t^4 & \text{if } J = I, \\ 1 & \text{if } J \lneq I. \end{cases}$$

となり，

$$\sum_{J<I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(3)} = \sum_{J<I} (-1)^{|J|} (P_0(L_J))^{(3)} = 24$$

を得る．したがって，定理 3.1 の公式の左辺は 0 で右辺は $1/2$ となり，この場合は，公式が成立しないことがわかる．

以上のように，定理 3.1 は長さ $2k+2$ のミルナー不変量に対しては成立しないことがわかった．そこで，ある補正項を加えることにより，長さ $2k+2$ の場合に成立する公式を与えた．

定理 3.2 (Y. Kotorii and Y [11]) L を n 成分絡み目 $(n \geq 4)$ で，長さ k 以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て 0 であるものとする．このとき，$2k+2$ 個の異なる自然数からなる任意の数列 I と任意の I 融合円盤に対し，次が成立する．

$$\overline{\mu}_L(I) \equiv -\frac{1}{(2k+1)!2^{2k+1}} \sum_{J<I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(2k+1)} - \delta_L(I) \pmod{\Delta_L(I)}.$$

ここで，$\delta_L(I)$ の定義は省略するが，$\delta_L(I)$ は絡み目 L の不変量で，I の長さ $k+1$ の部分列に対するミルナー不変量から定まる結び目の HOMFLYPT 多項式の組み合わせで与えられる．

長さ 1 のミルナー不変量は常に 0 であるので，定理 3.2 において，長さ 4 の場合はミルナー不変量が消えているという条件は不要である．更に，この場合は，$\delta(I)$ を長さ 2 のミルナー不変量を用いて記述できる．

定理 3.3 (Kotorii and Yasuhara [11]) L を 4 成分の絡み目とする．このとき，$1,2,3,4$ の並べ替えで得られる任意の数列 $I = i_1i_2i_3i_4$ と，任意の I 融合円盤に対し，次が成立する．

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_L(I) \;\equiv\; & -\frac{1}{48}\sum_{J<I}(-1)^{|J|}P_0^{(3)}(L_J) \\ & -\frac{1}{2}\overline{\mu}_L(i_1i_3)\overline{\mu}_L(i_2i_4)(\overline{\mu}_L(i_1i_3)+\overline{\mu}_L((i_2i_4)-1) \pmod{\Delta_L(I)}. \end{aligned}$$

注 3.3 数列 ij が I の部分列ならば，$\overline{\mu}(ij)$ は $\Delta_L(I)$ の倍数である．したがって，定理 3.3 において，$\overline{\mu}(i_1i_3)$ と $\overline{\mu}(i_2i_4)$ のいずれか一方が偶数の場合は，補正項が $\Delta_L(I)$ を法として 0 になることがわかる．

長さ k 以下のミルナー不変量が全て消えている絡み目に関しては，長さ $k+1$ のミルナー不変量が整数値をとることは定義から明らかである．このような，非自明なミルナー不変量のうち，長さ最小のものを “first non vanishing” ミルナー不変量と呼ぶ．“first non vanishing” ミルナー不変量に関しては，定理 3.1 よりも更に綺麗な公式が得られる．

定理 3.4 (J. B. Meilhan and Y [15]) L を n 成分絡み目 $(n \geq 3)$ で，長さ k 以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て 0 であるものとする．このとき，$k+1$ 個の異なる自然数からなる任意の数列 I と任意の I 融合円盤に対し，次が成立する．

$$\overline{\mu}_L(I) = \frac{-1}{k!2^k}\sum_{J<I}(-1)^{|J|}P_0^{(k)}(L_J) \in \mathbb{Z}.$$

注 3.4 数列Iの中に同じ数が繰り返し現れる場合のミルナー不変量は，元の絡み目の各成分のパラレル・コピーを（繰り返しの回数と同じ個数）とることにより得られる絡み目のリンク・ホモトピー不変量と等しくなる (1.2 (8))．したがって，一般のミルナー不変量に対しても上記の結果と同様の公式が得られることがわかる．

注 3.5 ミルナー不変量は有限型不変量ではない (1.2 (10)) ので，上述の結果は，有限型不変量でないものを有限型不変量で表すという，一見奇妙な等式を与えている．また，ミルナー不変量はコボルディズム不変量であるので (1.2 (4))，量子不変量がコボルディズム不変量を与えていると見ることもできる．

3.3. 証明の流れ

どの定理も大まかな証明の流れは同じである．ここでは，定理 3.1 に関して説明する．また，説明を簡単にするために$I = 1, 2, \ldots, n$と仮定する．数列の各項は，絡み目の添字であるので，必要ならば添字を付け替えることにより，この仮定で一般性を失うことはない．

まず，S^3の絡み目LとそのI融合円盤B_Iに対し，B_Iの近傍を取り除くことにより，3次元球体内のタングルを得る．これを，少し変形して，シリンダー$D^2 \times [0, 1]$内の**ストリング絡み目**lとみなす．

ストリング絡み目lにも絡み目の場合と同様にミルナー不変量が定義されるが，ストリング絡み目の場合は，$\Delta(I)$を考える必要はなく，$\mu_l(I)$自体が不変量になる．つまり，全てのミルナー不変量は整数値で定義される [7]．また，次が成立することに注意する．

$$\overline{\mu}_L(I) \equiv \mu_l(I) \ (\mathrm{mod}\ \Delta_L(I)), \quad \Delta_L(I) = \Delta_l(I). \tag{1}$$

注 3.6 ミルナー不変量はストリング絡み目の有限型不変量であることが知られている [1],[14]．したがって，注 3.4 では "一見奇妙" と表現したが，ストリング絡み目のミルナー不変量を介することにより，有限型不変量である HOMFLYPT 多項式と関連付けられることは，それほど奇妙なことではない．

ストリング絡み目のリンク・ホモトピー類は，ミルナー不変量で分類できることが知られている [7]．更に，次に紹介する定理では，リンク・ホモトピー類の代表元を与えている．

$\mathcal{J}_k$を異なる$k+1$個の自然数からなる数列$j_0, j_1, \ldots, j_{k-1}, j_k$ $(1 \leq j_0 < j_m < j_k \leq n,\ m = 1, \ldots, k-1)$とする．$\mathcal{J}_k$の数列$i_0 i_1 \ldots i_k$で$i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k$を満たすものに対し，$a_J$を$\{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$の置換とする．このとき，$J = i_0 a_J(i_1) \ldots a_J(i_{k-1}) i_k$は$\mathcal{J}_k$の元である．(また，逆に$\mathcal{J}_k$の任意の元は，この方法で得られる．)

T_Jを図 2 で示された，自明なnストリング絡み目$\mathbf{1}_n$に対するC_k-tree とする[3]．ここで，$\boxed{\ a_J\ }$は，置換a_Jを実現するポジティブな$k-1$ブレイドで，異なるストリング間の交差は高々1回であるものとする.（このようなブレイドは一意的に定まる.）更に，図 2 に描かれていない$\mathbf{1}_n$の他の成分がある場合，それらは全てT_Jの下側にあるもの

[3] C_k-tree は葉廣氏によって定義されたクラスパーの一種だが，ここでは，図 3 で示す絡み目のバンド和の略図であると思って差し支えない．

とする．また，T_J の $*$ 印が付いた辺を負の方向に半ひねりして得られる C_k-tree を T_J^{-1} とする．

そこで，V_J と V_J^{-1} をそれぞれ T_J と T_J^{-1} から，図 3 に従ったバンド和で得られる n ストリング絡み目とする.

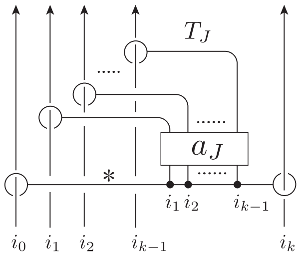


図 2: ストリング絡み目 V_J, V_J^{-1}

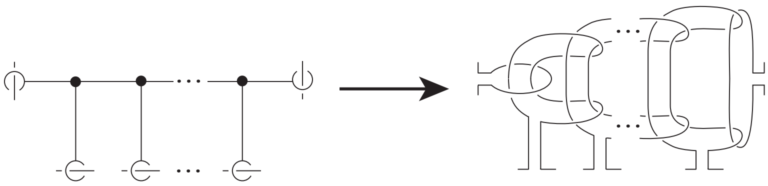


図 3: C_k-tree の表す絡み目のバンド和.

定理 3.5 (Y[23]) n ストリング絡み目 l は，絡み目 $l_1 \times \cdots \times l_{n-1}$ にリンク・ホモトピックである．ここで，$l_k = \prod_{J \in \mathcal{J}_k} V_J^{x_J}$ であり，

$$x_J = \mu_{l_i}(J) = \begin{cases} \mu_l(J) & \text{if } i = 1, \\ \mu_l(J) - \mu_{l_1 \cdots l_{i-1}}(J) & \text{if } i \geq 2. \end{cases}$$

である．

注 3.7 2 つのストリング絡み目 l_1, l_2 の積 $l_1 \times l_2$ は，l_2 を l_1 に積み重ねることにより定義される．この積は一般に可換ではないので，定理 3.5 において，各集合 $\mathcal{J}_k$ の元には辞書式順序が与えられているものとする．

式 (1) より，以下の 2 つのことを示すことにより，定理 3.1 を得る．

(I) $\mu_l(I) \equiv x_I \pmod{\gcd\{x_J \mid J < I,\ J \neq I\}}$ かつ $\Delta_l(I) = \gcd\{x_J \mid J < I,\ J \neq I\}$.

(II) $$\frac{-1}{(n-1)!2^{n-1}} \sum_{J<I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(n-1)} \equiv x_I \pmod{\gcd\{x_J \mid J < I,\ J \neq I\}}$$

(I) は，ミルナー不変量の計算で比較的容易に得られる．(II) を得るには，葉廣氏のクラスパー理論，$(\log P_0(L_J))^{(n-1)}$ の加法性やその他の HOMFLYPT 多項式の性質等を用いた（少なくとも講演者にとっては）複雑な議論を必要とする．また，この部分の議論で定理ごとに異なるアイデアが必要になる．

参考文献

[1] D. Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, J. Knot Theory Ram. **4** (1995), 13–32.

[2] A.J. Casson, *Link cobordism and Milnor's invariant*, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 39–40.

[3] K.T. Chen, *Commutator calculus and link invariants*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 44–45.

[4] T. D. Cochran, *Concordance invariance of coefficients of Conway's link polynomial*, Invent. Math. **82** (1985), 527–541.

[5] T. Cochran, *Links with trivial Alexander's module but nonvanishing Massey products.* Topology **29** (1990), 189-204

[6] T. Fleming and A. Yasuhara, *Milnor's invariants and self C_k-equivalence*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009) 761–770.

[7] N. Habegger and X.S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 389–419.

[8] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000), 1–83.

[9] J. Hoste, *The first coefficient of the Conway polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 299–302.

[10] T. Kanenobu, Y. Miyazawa, *HOMFLY polynomials as Vassiliev link invariants*, in *Knot theory*, Banach Center Publ. **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw (1998,) 165–185.

[11] Y. Kotorii and A. Yasuhara, *Milnor invariants of length $2k+2$ for links with vanishing Milnor invariants of length $\leq k$*, preprint.

[12] J. Levine, *The Conway polynomial of an algebraically split link*, Proceedings KNOTS96, ed. S. Suzuki (World Scientific Publishing Company, 1997), pp. 91–98.

[13] J. Levine, *A factorization of the Conway polynomial*, Comment. Math. Helv. **74** (1999), 27–52.

[14] X.S. Lin, *Power series expansions and invariants of links*, in "Geometric topology", AMS/IP Stud. Adv. Math. 2.1, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1997) 184–202.

[15] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol. **16** (2012), 889–917.

[16] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.

[17] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[18] K. Murasugi, *On Milnor's invariant for links*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 94–110.

[19] M. Polyak, *On Milnor's triple linking number*, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. I Math. **325** (1997), 77–82.

[20] N. Smythe, *Isotopy invariants of links and the Alexander matrix.* Amer. J. Math., **89** (1967), 693–704.

[21] L. Traldi, *Milnor's invariants and the completions of link modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), no. 1, 401–424.

[22] L. Traldi, *Conway's potential function and its Taylor series*, Kobe J. Math. **5** (1988), 233–263.

[23] A. Yasuhara, *Self Delta-equivalence for Links Whose Milnor's Isotopy Invariants Vanish*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 4721–4749.