Tabulation of 3-manifolds of lengths up to 10

– 河内明夫・Benjamin Burton との共同研究 –

田山育男（大阪市立大学）

概要

河内明夫により、link 全体の集合に整列順序が導入された。これは自然に prime link group 全体の集合上の整列順序を誘導し、最終的には向き付け可能な３次元閉多様体全体の集合上の整列順序を導く。河内と筆者は、この順序のもとに長さが 10 以下の prime link の列挙（全 444 個)、prime link group の列挙（全 400 個）及び３次元多様体の列挙（全 346 個）を行った。また、Benjamin Burton は、出てきた多様体の幾何構造をコンピュータを使い特定した（全て [1] を参照)。本稿の第１節では link の集合上の整列順序の定義と prime link の列挙の要点を、第２節では prime link group の列挙の要点を、第３節では ３次元多様体の列挙の要点を述べる。また巻末にこれらの一覧表を提示する。

1. link の集合上の整列順序

$\mathbf{Z}$ を整数全体の集合とし, $\mathbf{Z}^n$ を n 個の $\mathbf{Z}$ のコピーの直積とする。

$$\mathbf{X} = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbf{Z},\ n = 1, 2, \ldots\}$$

とし、$\mathbf{X}$ の各元を *lattice point* とよぶ。各 lattice point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$ に対し $\ell(\mathbf{x}) = n$ とおき、$\mathbf{x}$ の長さとよぶ。また lattice point $|\mathbf{x}|$ 及び $|\mathbf{x}|_N$ を次式で定める:

$|\mathbf{x}| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \qquad |\mathbf{x}|_N = (|x_{j_1}|, |x_{j_2}|, \ldots, |x_{j_n}|)$,
ここに $|x_{j_1}| \leqq |x_{j_2}| \leqq \cdots \leqq |x_{j_n}|$ かつ $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

集合 $\mathbf{X}$ 上の整列順序（[1] では *canonical order* とよばれている）を次の様に定める：

定義 1.1. 先ず $\mathbf{Z}$ 上の整列順序を $0 < 1 < -1 < 2 < -2 < 3 < -3 \cdots$ と定める。一般の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ に対しては、次の (1)-(4) の条件のうちの一つが満たされるときに $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ であると定める：

(1) $\ell(\mathbf{x}) < \ell(\mathbf{y})$.
(2) $\ell(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{y})$ かつ $|\mathbf{x}|_N < |\mathbf{y}|_N$, ここに $<$ は自然数の順序の辞書式順序。
(3) $|\mathbf{x}|_N = |\mathbf{y}|_N$ かつ $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$, 同上。

(4) $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ かつ $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, ここに $<$ は上で定められた $\mathbf{Z}$ の整列順序の辞書式順序。

各 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$ に対し、 $\min|\mathbf{x}|$ と $\max|\mathbf{x}|$ を次式で定める：

$$\min|\mathbf{x}| = \min_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|, \qquad \max|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|.$$

また $(\max|\mathbf{x}| + 1)$-string braid $\beta(\mathbf{x})$ を次式で定める：

$$\beta(\mathbf{x}) = \sigma_{|x_1|}^{\mathrm{sign}(x_1)} \sigma_{|x_2|}^{\mathrm{sign}(x_2)} \cdots \sigma_{|x_n|}^{\mathrm{sign}(x_n)},$$

ここに $\sigma_{|0|}^{\mathrm{sign}(0)} = 1$ と約束する。braid $\beta(\mathbf{x})$ を閉じて得られる link を $\mathrm{cl}\beta(\mathbf{x})$ とかく。link の同値類全体の集合を $\mathbf{L}$ とかく。ここに２つの link が同値であるとは片方を他方に移す空間の間の同相写像（向きを逆にするものも許す）が存在することをいう。このとき $\mathbf{x}$ を $\mathrm{cl}\beta(\mathbf{x})$ に写す写像

$$\mathrm{cl}\beta : \mathbf{X} \to \mathbf{L}$$

が得られるが、これは Alexander's braiding theorem から全射となる。各 $L \in \mathbf{L}$ に対し、写像

$$\sigma : \mathbf{L} \to \mathbf{X}$$

を $\sigma(L) = \min\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \,|\, \mathrm{cl}\beta(\mathbf{x}) = L\}$ により定めると、$\mathrm{cl}\beta \circ \sigma = 1_{\mathbf{L}}$ より、σ は単射である。そこで $\mathbf{L}$ 上の整列順序を次で定める:

定義 1.2. $L, L' \in \mathbf{L}$ に対し、$\sigma(L) < \sigma(L')$ のときに $L < L'$ であると定める。
また link $L \in \mathbf{L}$ に対し $\ell(\sigma(L))$ を L の長さといい、$\ell(L)$ とかく。

$\mathbf{L}^{\mathrm{p}}$ は $\mathbf{L}$ の部分集合で、すべての prime link から成るものとする。$\mathbf{L}^{\mathrm{p}}$ の列挙のために単射 σ を使う。$k \in \mathbf{Z}$ に対し lattice point k^n 及び $-k^n$ を次式で定める：

$$k^n = (\underbrace{k, k, \ldots, k}_{n}), \qquad -k^n = (-k)^n.$$

また $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{X}$ に対して lattice point $\mathbf{x}^T$, $-\mathbf{x}$, $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, $\delta(\mathbf{x})$ を次式で定める：

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T &= (x_n, \ldots, x_2, x_1), \\
-\mathbf{x} &= (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n), \\
(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) &= (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \\
\delta(\mathbf{x}) &= (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \\
\text{ここに} \quad x'_i &= \begin{cases} \mathrm{sign}(x_i)(\max|\mathbf{x}| + 1 - |x_i|) & (x_i \neq 0) \\ 0 & (x_i = 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

prime link の列挙の要点は lattice point の間に何らかの基本変形を定めることであり、これを次で与える：

定義 1.3. $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z},\ \mathbf{w} \in \mathbf{X}$, とし $k,\ l,\ n \in \mathbf{Z}$（ここに $n > 0$）とする。さらに $\varepsilon = \pm 1$ とする。lattice point 間の基本変形とは、次の作用 (1)–(12) と それらの逆作用 $(1)^{-}$–$(12)^{-}$ のうちの一つである：

(1) $(\mathbf{x},\ k,\ -k,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.
(2) $(\mathbf{x},\ k,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, ここに $|k| > \max|\mathbf{x}|,\ \max|\mathbf{y}|$.
(3) $(\mathbf{x},\ k,\ l,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ l,\ k,\ \mathbf{y})$, ここに $|k| > |l| + 1$ または $|l| > |k| + 1$.
(4) $(\mathbf{x}, \varepsilon k^{\ n},\ k+1,\ k,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ k+1,\ k,\ \varepsilon(k+1)^n,\ \mathbf{y})$, ここに $k(k+1) \neq 0$.
(5) $(\mathbf{x},\ k,\ \varepsilon(k+1)^n,\ -k,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ -(k+1), \varepsilon k^{\ n},\ k+1,\ \mathbf{y})$, ここに $k(k+1) \neq 0$.
(6) $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{y},\ \mathbf{x})$.
(7) $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^T$.
(8) $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.
(9) $\mathbf{x} \to \delta(\mathbf{x})$.
(10) $(1^n,\ \mathbf{x}, \varepsilon,\quad \mathbf{y}) \to (1^n,\ \mathbf{y}, \varepsilon,\quad \mathbf{x})$, ここに $\min|\mathbf{x}| \geqq 2$ かつ $\min|\mathbf{y}| \geqq 2$.
(11) $(k^2,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ -k^2,\ \mathbf{z},\ \mathbf{w}) \to (-k^2,\ \mathbf{x},\ \mathbf{w}^T,\ k^2,\ \mathbf{z},\ \mathbf{y}^T)$, ここに $\max|\mathbf{x}| < k < \min|\mathbf{y}|$, $\max|\mathbf{z}| < k < \min|\mathbf{w}|$ であり、$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ は なくてもかまわない。
(12) $(\mathbf{x},\ k,\ (k{+}1)^2,\ k,\ \mathbf{y}) \to (\mathbf{x},\ -k,\ -(k{+}1)^2,\ -k,\ \mathbf{y}^T)$, ここに $\max|\mathbf{x}| < k < \min|\mathbf{y}|$ であり、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は なくてもかまわない。

定義 1.3 の意味は次の補題で明らかになる：

補題 1.4. lattice point $\mathbf{x}$ が lattice point $\mathbf{y}$ に基本変形で移るなら、$\mathrm{cl}\beta(\mathbf{x}) = \mathrm{cl}\beta(\mathbf{y})$.

Δ は $\mathbf{X}$ の部分集合で、次の元から成るものであると定める：
$0,\ 1^m$ 及び $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ここに $m \geqq 2,\ n \geqq 4,\ x_1 = 1,\ 1 \leqq |x_i| \leqq \frac{n}{2},\ |x_n| \geqq 2$ かつ $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \{1, 2, \ldots, \max|\mathbf{x}|\}$.

このとき 各 $\mathbf{x} \in \Delta$ に対し $\sharp\{\mathbf{y} \in \Delta | \mathbf{y} < \mathbf{x}\} < \infty$ となるという事実と、$\sigma(\mathbf{L}^{\mathrm{p}}) \subset \Delta$ という事実が認められる。先ず Δ の lattice point $\mathbf{x}$ を整列順序に従って列挙し、$\mathrm{cl}\beta(\mathbf{x})$ が prime link でないか 既にテーブルに出現した prime link の場合は $\mathbf{x}$ を列から取り除く。ここで除去可能な lattice point の大部分は、補題 1.4 を使うことにより発見できることを注意しておく。この結果、長さが 10 以下の prime link は 444 個存在することが分かる。

2. prime link group の列挙

knot はその外部で決定され、prime knot の外部は基本群で決定されるので、成分数が 2 以上の link に対して link group を分類すればよい。[1] では、先ず長さが 10 以下の prime link の外部を分類し、次に外部のテーブルが group のテーブルと一致することを厳密に示しているが、ここではそれらを概説する。

定義 2.1. S^3 の r 成分 link L, L' に対し、それらの Alexandre polynomial$\Delta_L(t_1,\dots,t_r)$ と $\Delta_{L'}(t_1,\dots,t_r)$ が同値であるとは、同型写像

$\varphi:(t_1,\dots,t_r|t_it_j=t_jt_i(i,j=1,\dots,r))\to(t_1,\dots,t_r|t_it_j=t_jt_i(i,j=1,\dots,r))$ で

$\Delta_{L'}(t_1,\dots,t_r)=\pm t_1^{\lambda_1}\cdots t_r^{\lambda_r}\Delta_L(\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_r))$ (for $\exists\lambda_i\in\mathbf{Z},\ i=1,\dots,r$)

を満たすものが存在することである。

S^3 の link L に対し 外部を $E(L)=cl(S^3-N(L))$ とかく。ここに $N(L)$ は L の regular neighborhood を表わす。このとき次の補題を得る：

補題 2.2. S^3 の link L, L' に対し 同型写像 $\pi_1(E(L))\to\pi_1(E(L'))$ が存在するなら, それらの Alexander polynomial は同値である。

同値な Alexander polynomial をもつ link は同じグループに入れるというルールにより、link をいくつかのグループに分ける。補題から異なるグループに入る２つの link の link group は同型にならない。長さが 10 以下の 2 成分以上の prime link に対し、2 個以上の prime link から成るグループは 42 個あることが分かる。それらを次に示す：

(1) $4^2_1<7^2_7<9^2_{43}<9^2_{59}$	(2) $6^2_1<9^2_{49}$
(3) $5^2_1<7^2_8<8^2_{15}<9^2_{47}<10^2_{174}<10^2_{173}$	(4) $6^2_3<8^2_{16}<9^2_{45}<10^2_{128}$
(5) $7^2_3<9^2_{46}$	(6) $9^2_{50}<10^2_{132}$
(7) $7^2_5<9^2_{48}<10^2_{130}$	(8) $7^2_2<9^2_{54}<10^2_{140}$
(9) $7^2_4<9^2_{44}<10^2_{162}<10^2_{124}$	(10) $10^2_{176}<10^2_{178}$
(11) $9^2_{57}<10^2_{167}$	(12) $7^2_6<9^2_{55}<9^2_{56}<10^2_{160}<10^2_{161}$
(13) $9^2_{58}<10^2_{168}$	(14) $8^2_{12}<8^2_{10}<10^2_{163}<10^2_{129}<10^2_{170}<10^2_{131}$
(15) $8^2_{13}<10^2_{154}$	(16) $8^2_{11}<10^2_{125}$
(17) $9^2_{27}<9^2_{15}$	(18) $9^2_{18}<9^2_{36}<10^2_{145}$
(19) $9^2_{33}<9^2_{32}$	(20) $9^2_{13}<10^2_{143}$
(21) $9^2_{31}<10^2_{A}$	(22) $10^2_{56}<10^2_{34}$
(23) $10^2_{76}<10^2_{78}$	(24) $10^2_{31}<10^2_{36}<10^2_{50}$
(25) $10^2_{81}<10^2_{83}<10^2_{104}$	(26) $10^2_{107}<10^2_{93}<10^2_{91}<10^2_{106}$
(27) $10^2_{84}<10^2_{105}$	(28) $10^2_{48}<10^2_{66}$
(29) $6^3_3<8^3_7<10^3_{44}$	(30) $6^3_1<8^3_8<9^3_{13}<9^3_{17}$

(31) $6^3_2 < 8^3_9 < 9^3_{19} < 9^3_{18} < 10^3_{61}$
(32) $7^3_1 < 9^3_{14} < 10^3_{48}$
(33) $8^3_3 < 10^3_{49}$
(34) $8^3_1 < 10^3_{45}$
(35) $10^3_{58} < 10^3_{59}$
(36) $8^3_5 < 10^3_{56}$
(37) $8^3_6 < 10^3_{60}$
(38) $8^4_3 < 10^4_A$
(39) $8^4_2 < 10^4_{12} < 10^4_B < 10^4_C$
(40) $10^4_{16} < 10^4_{17}$
(41) $8^4_1 < 10^4_D$
(42) $10^4_{15} < 10^4_{13} < 10^4_{18}$

外部が同相な link をまとめることにより、各グループを細分する。

(2), (4), (5), (6), (7), (11), (13), (16), (29), (30), (32), (33), (34), (35), (38), (39), (40), (41), (42)　に対しては、各グループ内の外部は互いに同相である。他のグループについて、その同相タイプは次の様になる（証明は [1] 参照）：

(1) $E(4^2_1) \cong E(7^2_7) \cong E(9^2_{43}),\ E(9^2_{59})$

(3) $E(5^2_1) \cong E(7^2_8) \cong E(8^2_{15}) \cong E(9^2_{47}),\ E(10^2_{174}),\ E(10^2_{173})$

(8) $E(7^2_2),\ E(9^2_{54}),\ E(10^2_{140})$

(9) $E(7^2_4) \cong E(9^2_{44}) \cong E(10^2_{124}),\ E(10^2_{162})$

(10) $E(10^2_{176}),\ E(10^2_{178})$

(12) $E(7^2_6) \cong E(10^2_{160}) \cong E(10^2_{161}),\ E(9^2_{55}) \cong E(9^2_{56})$

(14) $E(8^2_{12}) \cong E(10^2_{131}),\ E(8^2_{10}) \cong E(10^2_{129}),\ E(10^2_{163}),\ E(10^2_{170})$

(15) $E(8^2_{13}),\ E(10^2_{154})$

(17) $E(9^2_{27})\ E(9^2_{15})$

(18) $E(9^2_{18}),\ E(9^2_{36}),\ E(10^2_{145})$

(19) $E(9^2_{33}),\ E(9^2_{32})$

(20) $E(9^2_{13}),\ E(10^2_{143})$

(21) $E(9^2_{31}),\ E(10^2_A)$

(22) $E(10^2_{56}),\ E(10^2_{34})$

(23) $E(10^2_{76}),\ E(10^2_{78})$

(24) $E(10^2_{31}),\ E(10^2_{36}),\ E(10^2_{50})$

(25) $E(10^2_{81}),\ E(10^2_{83}),\ E(10^2_{104})$

(26) $E(10^2_{107}),\ E(10^2_{93}),\ E(10^2_{91}),\ E(10^2_{106})$

(27) $E(10^2_{84}),\ E(10^2_{105})$

(28) $E(10^2_{48}),\ E(10^2_{66})$

(31) $E(6^3_2) \cong E(9^3_{18}),\ E(8^3_9) \cong E(9^3_{19}) \cong E(10^3_{61})$

(36) $E(8^3_5),\ E(10^3_{56})$

(37) $E(8^3_6),\ E(10^3_{60})$

以上で長さが 10 以下の prime link の外部が分類された（全 400 個)。次に各グループで $E(L) \not\cong E(L')$ が $\pi_1(E(L)) \not\cong \pi_1(E(L'))$ を導くことを示す。

prime link L に対し その外部 $E(L)$ が *simple* であるとは、$E(L)$ 内に essential torus が存在しないことをいう。このとき、L もまた *simple* link であるという。次の補題は有名な事実である：

補題 2.3. simple link の外部 $E(L)$ は hyperbolic 3-manifold であるか、orbit space が穴あき球面であるような special Seifert manifold である。

$E(L)$ が special Seifert manifold とすると、$E(L)$ の Seifert 構造は S^3 の Seifert 構造に由来し、$E(L)$ の orbit surface は次の３つの場合に限られる：

(i) exceptional fiber が高々２つの disk,
(ii) exceptional fiber が高々１つの annulus,
(iii) exceptional fiber のない ２つ穴のある disk.

非負整数 p, q に対し (p, q) 型 torus link を $K_{p,q}$ とかく。(i) の場合、互いに素な正整数 p, q があり、L は torus knot $K_{p,q}$ になる。(ii) の場合、互いに素な正整数 p, q があり、$E(L)$ の exceptional fiber の型は (p, q) となる。このとき、L は 和 $L_{p,q} \underset{def}{=} S^1 \cup K_{p,q}$ と取ることができる。ここに S^3 の Seifert fibration で、(p, q) 型と (q, p) 型の２つの exceptional fiber をもつものを考えるとき、regular fiber はすべて (p, q) 型 torus knot であるが、その一つを選んで $K_{p,q}$ かき、又 (q, p) 型 exceptional fiber を S^1 とかいた。(iii) の場合、２つ穴の開いた disk を $D(2)$ とかくとき、$E(L)$ は $S^1 \times D(2)$ に同相であり、L は $L_{2,0}$ と取ることができる。このとき次の補題が得られる（[1] 参照)。これから、各グループで、$E(L) \not\cong E(L')$ は $\pi_1(E(L)) \not\cong \pi_1(E(L'))$ を導くことが示される。

補題 2.4. L は prime link とし、L_0 は simple link とする。
(1) 基本群 $\pi_1(E(L))$ が $\pi_1(E(L_0))$ に同型となるための必要十分条件は、$E(L)$ が $E(L_0)$ に同相であるか、$(p, q) = (p, q') = 1$ なる正整数 p, q, q' で、対 $(E(L_0), E(L))$ が対 $(E(L_{p,q}), E(L_{p,q'}))$ に同相となるものが存在することである。

(2) p, q, q' は $(p, q) = (p, q') = 1$ なる正整数とする。$E(L_{p,q})$ が $E(L_{p,q'})$ に同相となるための必要十分条件は、$q' \equiv \pm q \pmod p$ である。

(3) L 及び L_0 の crossing number が 15 より小さいとする。$\pi_1(E(L))$ が $\pi_1(E(L_0))$ に同型となるための必要十分条件は、$E(L)$ が $E(L_0)$ に同相となることである。

3．３次元多様体の列挙

基本群の表にある link から 0-surgery して得られる３次元多様体を並べ、２回目以降に現れる多様体を取り除くことにより、連結で向き付け可能な３次元閉多様体の表を作成する ([1] 参照)。

link L から 0-surgery して得られる多様体を $\chi(L,0)$ とかく。基本群の表にある link L に対して $\chi(L,0)$ を first homology group $H_1(\chi(L,0))$ により分類する。長さが 10 以下の場合､16 種類の群 0, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_3\oplus\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_4$，$\mathbf{Z}_6$，$\mathbf{Z}_8$，$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$，$\mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4$，$\mathbf{Z}_5 \oplus \mathbf{Z}_5$ が出てきて、各々の群を導く link の個数は 50, 141, 69, 6, 1, 4, 6, 1, 12, 7, 5, 7, 60, 21, 9, 1 となる。各場合で、２つの多様体が同相であるかないかを決定していくが、同相であることの議論は省略する。同相でないことを示すには不変量を比べることになるが、使用した不変量を述べる。

Case 1. $H_1(\chi(L,0)) \cong 0$.

50 個のうち、4 個は除去される。残り 46 個については、$\tau_5(\chi(L,0))$ または $\tau_7(\chi(L,0))$ を比較し、全て異なることが示される。

Case 2. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}$.

141 個のうち、8 個は除去される。残り 133 個は Alexander polynomial と $\tau_5(\chi(L,0))$ で区別できる。

Case 3. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

69 個のうち、21 個は除去される。他の 48 個は Alexander polynomial と $\tau_5(\chi(L,0))$ で区別できる。

Case 4. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

6 個は、Alexander polynomial により、互いに異なることが示される。

Case 5. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$

1 個だけなので、これは多様体のテーブルに現れることになる。

Case 6. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$.

4 個に対し、maximal free abelian covering space の first characteristic polynomial を比較し、全て異なることが示される。

Case 7. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

6 個のうち 1 個は除去される。他の 5 個は maximal free abelian covering space の first characteristic polynomial または second elementary ideal を比較し区別できる。

Case 8. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$

1 個しかないので、削除されずに多様体のテーブルに現れる。

Case 9. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_2$

12 個のうち、1 個は除去される。多様体 M の n-fold cyclic covering space を M_n とかくと、残り 11 個は $H_1(\chi(L,0)_2)$, $H_1((\chi(L,0)_2)_3)$, $H_1((\chi(L,0)_2)_5)$ 等で区別される。

Case 10. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_4$.

7 個は、double covering space の homology $H_1(\chi(L,0)_2)$ で、区別される。

Case 11. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_6$

5 個は $H_1(\chi(L,0)_2)$ で、全て異なることが示される。

Case 12. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_8$

7 個のうち、1 個は除去される。残り 6 個は、$n = 2, 4, 8$ に対して n-fold cyclic covering space の first homology の位数 $|H_1(\chi(L,0)_n)|$ を比較することにより、区別される。

Case 13. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$

60 個のうち、12 個は除去される。他の 48 個は、3 種類の double covering space の first homology と $\tau_5(\chi(L,0))$ を計算することにより全て区別される。

Case 14. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$

21 個のうち、6 個は除去される。残り 15 個は 4 種類の triple covering space の first homology で区別される。

Case 15. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4$.

9 個は、3 種類の double covering space の first homology を比較することにより、区別できる。

Case 16. $H_1(\chi(L,0)) \cong \mathbf{Z}_5 \oplus \mathbf{Z}_5$.

1 個しかないので、多様体のテーブルに現れる。

case 1 から 16 までを統合し、長さが 10 以下の連結で向き付け可能な 3 次元閉多様体のテーブルが得られるが、それを巻末にのせる。$\mathbf{x}$ 欄は、$cl\beta(\mathbf{x})$ が prime link で $\sigma(cl\beta(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ となる lattice point $\mathbf{x}$ を意味する。L 欄は、$cl\beta(\mathbf{x})$ の Conway 表記を意味する。π 欄で $\times$ 印のついているものを除くと基本群の列挙が得られる。M 欄では列挙された多様体に番号を付けている。

特定した多様体の幾何構造については、紙面の都合上その一部分を以下に書く。ここに T 欄は大まかなタイプを、D 欄は詳細情報を表わす。

$\mathbf{x}$	L	π	M	T	D
0	O		1	Seifert fibred	$S^1 \times S^2$
1^2	2_1^2		2	Seifert fibred	S^3
1^3	3_1		3	Torus bundle	$T \times I/[1,1\|-1,0]$
1^4	4_1^2		4	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(2,-1)]$
$(1,-2,1,-2)$	4_1		5	Torus bundle	$T \times I/[2,1\|1,1]$
1^5	5_1		6	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(5,2)(10,-9)]$
$(1^2,-2,1,-2)$	5_1^2		7	Seifert fibred	$SFS[T:(1,1)]$
1^6	6_1^2		8	Seifert fibred	$SFS[S^2:(3,1)(3,1)(3,-1)]$
$(1^3,2,-1,2)$	5_2		9	Graph manifold($1SFS$)	$SFS[A:(2,1)]/[0,1\|1,-1]$
$(1^3,-2,1,-2)$	6_2		10	Hyperbolic	Hyperbolic : 3.77082945111
$(1^2,2,1^2,2)$	6_3^3		11	Lens	RP^3
$(1^2,-2,1^2,-2)$	6_1^3		12	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(3,1)(4,-3)]$
$(1^2,-2,1,-2^2)$	6_3		13	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.05976642564
$(1,-2,1,-2,1,-2)$	6_2^3		14	Torus bundle	$T \times S^1$
$(1,-2,1,3,-2,3)$	6_3^2		15	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(2,1)(3,-5)]$
1^7	7_1		16	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(7,3)(14,-13)]$
$(1^4,2,-1,2)$	6_2^2		17	Non-prime	$L(3,1)\sharp L(3,1)$
$(1^4,-2,1,-2)$	7_1^2		18	Hyperbolic	$Hyp2.25976713(0)$
$(1^3,2,1^2,2)$	7_7^2	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(6,-5)]$
$(1^3,2,-1^2,2)$	7_8^2	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[T:(1,1)]$
$(1^3,-2,1^2,-2)$	7_4^2		19	Graph manifold($1SFS$)	$SFS[A:(2,1)]/[-1,8\|0,1]$
$(1^3,-2,1,-2^2)$	7_2^2		20	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(5,1)(7,-5)]$
$(1^2,-2,1^2,-2^2)$	7_5^2		21	Non-geometric($1Hyp, 1SFS$)	$SFS[D:(2,1)(2,-1)] \cup Hyp2.02988321(L104001)$
$(1^2,-2,1,-2,1,-2)$	7_6^2		22	Graph manifold($2SFS$)	$SFS[D:(2,1)(3,-2)] \cup Graph[S^2 + 3\text{punctures}]$ /[non-fibre-preserving gluing]
$(1^2,2,-1,-3,2,-3)$	6_1		23	Graph manifold($1SFS$)	$SFS[A:(2,1)]/[0,1\|1,-2]$
$(1^2,-2,1,3,-2,3)$	7_6		24	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.18027441937
$(1,-2,1,-2,3,-2,3)$	7_7		25	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.3326666425
$(1,-2,1,3,-2^2,3)$	7_1^3		26	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(4,1)(5,-4)]$
1^8	8_1^2		27	Seifert fibred△	$SFS[S^2:(4,1)(4,1)(4,-1)]$
$(1^5,2,-1,2)$	7_3		28	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.21823364488
$(1^5,-2,1,-2)$	8_2		29	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.70364205913
$(1^4,2,1^2,2)$	8_7^3	$\times$	$\times$	Lens	$L(4,1)$
$(1^4,2,-1^2,2)$	8_8^3	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(3,-2)]$
$(1^4,-2,1^2,-2)$	8_1^3		30	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(5,2)(6,-5)]$
$(1^3,2,1^3,2)$	8_{19}		31	Seifert fibred	$SFS[S^2:(3,2)(4,1)(12,-11)]$
$(1^3,2,-1^3,2)$	8_{20}		32	Graph manifold($2SFS$)	$SFS[D:(2,1)(2,1)] \cup /mSFS[D:(3,1)(3,2)]$, $m=[0,1\|1,0]$
$(1^3,-2,1^3,-2)$	8_5		33	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.73630906712
$(1^4,2,-1,2^2)$	7_5		34	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.98781044336
$(1^4,-2,1,-2^2)$	8_7		35	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.11165991536
$(1^3,2,-1^2,2^2)$	8_{21}		36	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.3334895669
$(1^3,-2,1^2,-2^2)$	8_{10}		37	Hyperbolic	Hyperbolic : 7.7900159735
$(1^3,2,-1,2,-1,2)$	8_9^3		38	Seifert fibred	$KB/n^2 \tilde{\times} S^1$
$(1^3,-2,1,-2,1,-2)$	8_5^3		39	Graph manifold($1SFS$)	$SFS[A:(2,1)]/[-1,3\|1,-2]$
$(1^2,-2,1^2,-2,1,-2)$	8_{16}		40	Hyperbolic	Hyperbolic : 9.78375114087
$(1^3,-2,1,-2^3)$	8_9		41	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.65624417666
$(1^3,-2^2,1,-2^2)$	8_2^3		42	Graph manifold($2SFS$)	$SFS[D:(2,1)(2,1)] \cup /mSFS[D:(2,1)(3,2)]$, $m=[0,1\|1,0]$
$(1^2,-2,1,-2,1,-2^2)$	8_{17}		43	Hyperbolic	Hyperbolic : 9.65085003623
$(1^2,-2,1,-2^2,1,-2)$	8_6^3		44	Seifert fibred	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(3,1)(3,-4)]$
$(1^2,2^2,1^2,2^2)$	8_{10}^3		45	Non-prime	$SFS[S^2:(2,1)(2,1)(2,-1)]\sharp S^2 \times S^1$
$(1^2,-2^2,1^2,-2^2)$	8_4^3		46	Graph manifold($1SFS$)	Non-or, $g=2+2\text{punctures}/n^2 \tilde{\times} S^1/[0,1\|1,0]$
$(1,-2,1,-2,1,-2,1,-2)$	8_{18}		47	Hyperbolic	Hyperbolic : 11.1472182257
$(1^3,2,-1,-3,2,-3)$	7_3^2		48	Seifert fibred	$SFS[T:(2,1)]$
$(1^3,-2,1,3,-2,3)$	8_5^2		49	Hyperbolic	Hyperbolic : 2.54158501007

参考文献

[1] Akio KAWAUCHI, Ikuo TAYAMA and Benjamin BURTON, Tabulation of 3-manifolds of lengths up to 10, preprint. http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/ kawauchi/TabuMfd10h.pdf

$\mathbf{x}$	L	π	M
0	O		1
1^2	2^2_1		2
1^3	3_1		3
1^4	4^2_1		4
$(1,-2,1,-2)$	4_1		5
1^5	5_1		6
$(1^2,-2,1,-2)$	5^2_1		7
1^6	6^2_1		8
$(1^3,2,-1,2)$	5_2		9
$(1^3,-2,1,-2)$	6_2		10
$(1^2,2,1^2,2)$	6^3_3		11
$(1^2,-2,1^2,-2)$	6^3_1		12
$(1^2,-2,1,-2^2)$	6_3		13
$(1,-2,1,-2,1,-2)$	6^3_2		14
$(1,-2,1,3,-2,3)$	6^2_3		15
1^7	7_1		16
$(1^4,2,-1,2)$	6^2_2		17
$(1^4,-2,1,-2)$	7^2_1		18
$(1^3,2,1^2,2)$	7^2_7	$\times$	$\times$
$(1^3,2,-1^2,2)$	7^2_8	$\times$	$\times$
$(1^3,-2,1^2,-2)$	7^2_4		19
$(1^3,-2,1,-2^2)$	7^2_2		20
$(1^2,-2,1^2,-2^2)$	7^2_5		21
$(1^2,-2,1,-2,1,-2)$	7^2_6		22
$(1^2,2,-1,-3,2,-3)$	6_1		23
$(1^2,-2,1,3,-2,3)$	7_6		24
$(1,-2,1,-2,3,-2,3)$	7_7		25
$(1,-2,1,3,-2^2,3)$	7^3_1		26
1^8	8^2_1		27
$(1^5,2,-1,2)$	7_3		28
$(1^5,-2,1,-2)$	8_2		29
$(1^4,2,1^2,2)$	8^3_7	$\times$	$\times$
$(1^4,2,-1^2,2)$	8^3_8	$\times$	$\times$
$(1^4,-2,1^2,-2)$	8^3_1		30
$(1^3,2,1^3,2)$	8_{19}		31
$(1^3,2,-1^3,2)$	8_{20}		32
$(1^3,-2,1^3,-2)$	8_5		33
$(1^4,2,-1,2^2)$	7_5		34
$(1^4,-2,1,-2^2)$	8_7		35
$(1^3,2,-1^2,2^2)$	8_{21}		36
$(1^3,-2,1^2,-2^2)$	8_{10}		37
$(1^3,2,-1,2,-1,2)$	8^3_9		38
$(1^3,-2,1,-2,1,-2)$	8^3_5		39
$(1^2,-2,1^2,-2,1,-2)$	8_{16}		40
$(1^3,-2,1,-2^3)$	8_9		41
$(1^3,-2^2,1,-2^2)$	8^3_2		42
$(1^2,-2,1,-2,1,-2^2)$	8_{17}		43
$(1^2,-2,1,-2^2,1,-2)$	8^3_6		44
$(1^2,2^2,1^2,2^2)$	8^3_{10}		45
$(1^2,-2^2,1^2,-2^2)$	8^3_4		46
$(1,-2,1,-2,1,-2,1,-2)$	8_{18}		47
$(1^3,2,-1,-3,2,-3)$	7^2_3		48
$(1^3,-2,1,3,-2,3)$	8^2_5		49
$(1^2,2,1^2,-3,2,-3)$	8^2_{16}	$\times$	$\times$
$(1^2,2,-1^2,-3,2,-3)$	8^2_{15}	$\times$	$\times$
$(1^2,-2,1^2,3,-2,3)$	8^2_9		50
$(1^2,-2,1,-2,3,-2,3)$	8^2_8		51
$(1^2,-2,1,3,-2^2,3)$	8^2_{12}		52
$(1,-2,1,-2,1,3,-2,3)$	8^2_{13}		53
$(1^2,-2,1,3,-2,3^2)$	8^2_7		54
$(1,-2,1,-2,3,-2^2,3)$	8^2_{10}		$\times$
$(1,-2,1,3,-2^3,3)$	8^2_{11}		55
$(1,2^2,1,3,2^2,3)$	8^4_3		56
$(1,2^2,1,3,-2^2,3)$	8^4_2		$\times$
$(1,-2^2,1,3,-2^2,3)$	8^4_1		$\times$
$(1,-2,3,-2,1,-2,3,-2)$	8^2_{14}		57
$(1,-2,1,3,-2,-4,3,-4)$	8_{12}		58
1^9	9_1		59
$(1^6,2,-1,2)$	8^2_2		60
$(1^6,-2,1,-2)$	9^2_1		61
$(1^5,2,1^2,2)$	9^2_{43}	$\times$	$\times$
$(1^5,2,-1^2,2)$	9^2_{44}	$\times$	$\times$
$(1^5,-2,1^2,-2)$	9^2_{13}		62
$(1^4,2,1^3,2)$	9^2_{49}	$\times$	$\times$
$(1^4,2,-1^3,2)$	9^2_{51}		$\times$
$(1^4,-2,1^3,-2)$	9^2_{19}		63
$(1^4,-2,-1^3,-2)$	9^2_{50}		64

$\mathbf{x}$	L	π	M
$(1^5,2,-1,2^2)$	8^2_3		65
$(1^5,-2,1,-2^2)$	9^2_2		66
$(1^4,2,-1^2,2^2)$	9^2_{52}		67
$(1^4,-2,1^2,-2^2)$	9^2_{20}		68
$(1^4,2,-1,2,-1,2)$	9^2_{55}		69
$(1^4,-2,1,-2,1,-2)$	9^2_{31}		70
$(1^3,2,1^3,2^2)$	9^2_{53}		71
$(1^3,2,-1^3,2^2)$	9^2_{54}		72
$(1^3,-2,1^3,2^2)$	8^2_4		73
$(1^3,-2,1^3,-2^2)$	9^2_{23}		74
$(1^3,2,-1^2,2,-1,2)$	9^2_{57}		75
$(1^3,-2,1^2,-2,1,-2)$	9^2_{35}		76
$(1^2,-2,1^2,-2,1^2,-2)$	9^2_{40}		77
$(1^4,-2,1,-2^3)$	9^2_5		78
$(1^4,-2^2,1,-2^2)$	9^2_{14}		79
$(1^3,-2,1^2,-2^3)$	9^2_{21}		80
$(1^3,-2,1,-2,1,-2^2)$	9^2_{34}		81
$(1^3,-2,1,-2^2,1,-2)$	9^2_{37}		82
$(1^3,2^2,1^2,2^2)$	9^2_{59}		83
$(1^3,-2^2,1^2,-2^2)$	9^2_{29}		84
$(1^2,-2,1^2,-2,1,-2^2)$	9^2_{39}		85
$(1^2,2,-1,2,1^2,2^2)$	9^2_{61}		86
$(1^2,-2,1,-2,1^2,-2^2)$	9^2_{41}		87
$(1^2,-2,1,-2,1,-2,1,-2)$	9^2_{42}		88
$(1^4,2,-1,-3,2,-3)$	8_6		89
$(1^4,-2,1,3,-2,3)$	9_{11}		90
$(1^3,2,1^2,-3,2,-3)$	9_{43}		91
$(1^3,2,-1^2,-3,2,-3)$	9_{44}		92
$(1^3,-2,1^2,3,-2,3)$	9_{36}		93
$(1^3,-2,-1^2,3,-2,3)$	9_{42}		94
$(1^3,2,-1,2,3,-2,3)$	7_2		95
$(1^3,2,-1,2,-3,2,-3)$	8_{14}		96
$(1^3,-2,1,-2,3,-2,3)$	9_{26}		97
$(1^3,-2,1,-2,-3,2,-3)$	8_4		98
$(1^3,2,-1,-3,2^2,-3)$	8^3_3		99
$(1^3,-2,1,3,-2^2,3)$	9^3_6		100
$(1^2,2,1^2,2,-3,2,-3)$	9^3_{13}	$\times$	$\times$
$(1^2,2,-1^2,2,-3,2,-3)$	9^3_{14}	$\times$	$\times$
$(1^2,-2,1^2,-2,3,-2,3)$	9^3_2		$\times$
$(1^2,2,1^2,-3,2^2,-3)$	9^3_{19}	$\times$	$\times$
$(1^2,2,-1^2,-3,2^2,-3)$	9^3_{18}	$\times$	$\times$
$(1^2,-2,1^2,3,-2^2,3)$	9^3_8		101
$(1^2,2,-1,2,1,3,-2,3)$	9_{45}		102
$(1^2,-2,1,-2,1,3,-2,3)$	9_{32}		103
$(1^2,-2,1,3,-2,1,3,-2)$	9^3_{11}		104
$(1^3,2,-1,-3,2,-3^2)$	8_8		105
$(1^3,-2,1,3,-2,3^2)$	9_{20}		106
$(1^2,-2,1^2,3,-2,3^2)$	9^3_1		$\times$
$(1^2,2,-1,2^2,3,-2,3)$	7_4		107
$(1^2,2,-1,2^2,-3,2,-3)$	8_{11}		108
$(1^2,-2,1,-2^2,3,-2,3)$	9_{27}		109
$(1^2,-2,1,-2^2,-3,2,-3)$	8_{13}		110
$(1^2,-2,1,3,2^3,3)$	8_{15}		111
$(1^2,-2,1,3,-2^3,3)$	9_{24}		112
$(1^2,-2^2,1,-2,3,-2,3)$	9_{30}		113
$(1^2,2^2,1,3,2^2,3)$	9^3_{17}	$\times$	$\times$
$(1^2,2^2,1,3,-2^2,3)$	9^3_{16}		$\times$
$(1^2,2^2,1,-3,2^2,-3)$	9^3_{15}		114
$(1^2,-2^2,1,3,-2^2,3)$	9^3_4		115
$(1,-2,1,-2,1,-2,3,-2,3)$	9^3_{10}		116
$(1,-2,1,-2,1,3,2^2,3)$	9^3_{20}		$\times$
$(1,-2,1,-2,1,3,-2^2,3)$	9^3_{12}		117
$(1,-2,1,-2,1,-3,2^2,-3)$	9^3_{21}		118
$(1,-2,1,-2^2,1,3,-2,3)$	9_{33}		119
$(1,2,-1,2,3,-2,1,-2,3)$	9_{46}		$\times$
$(1,-2,1,-2,3,-2,1,-2,3)$	9_{34}		120
$(1,-2,1,-2,-3,-2,1,-2,-3)$	9_{47}		121
$(1^2,-2,1,-2,3,-2,3^2)$	9_{31}		122
$(1^2,-2,1,3,-2^2,3^2)$	9_{28}		123
$(1,-2,1,3,-2,1,3,-2,3)$	9_{40}		124
$(1^2,-2,1,3,-2,-4,3,-4)$	9^2_{11}		125
$(1,-2,1,-2^3,3,-2,3)$	9_{17}		126
$(1,-2,1,-2,3,-2^3,3)$	9_{22}		127
$(1,-2,1,3,-2^4,3)$	9^3_5		128
$(1,-2^2,1,-2,3,-2^2,3)$	9^3_9		129
$(1,-2^2,3,-2,1,-2,3,-2)$	9_{29}		130

$\mathbf{x}$	L	π	M
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	9^2_{12}		131
$(1, -2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)$	8^2_6		132
$(1, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	9^2_{25}		133
1^{10}	10^2_1		134
$(1^7, 2, -1, 2)$	9_3		135
$(1^7, -2, 1, -2)$	10_2		136
$(1^6, 2, 1^2, 2)$	10^3_{44}	×	×
$(1^6, 2, -1^2, 2)$	10^3_{45}	×	×
$(1^6, -2, 1^2, -2)$	10^3_1		137
$(1^5, 2, 1^3, 2)$	10_{124}		138
$(1^5, 2, -1^3, 2)$	10_{126}		139
$(1^5, -2, 1^3, -2)$	10_{46}		140
$(1^5, -2, -1^3, -2)$	10_{125}		141
$(1^4, 2, 1^4, 2)$	10^3_{50}		142
$(1^4, 2, -1^4, 2)$	10^3_{51}		143
$(1^4, -2, 1^4, -2)$	10^3_7		144
$(1^6, 2, -1, 2^2)$	9_6		145
$(1^6, -2, 1, -2^2)$	10_5		146
$(1^5, 2, -1^2, 2^2)$	10_{127}		147
$(1^5, -2, 1^2, -2^2)$	10_{47}		148
$(1^5, 2, -1, 2, -1, 2)$	10^3_{56}		149
$(1^5, -2, 1, -2, 1, -2)$	10^3_{27}		150
$(1^4, 2, 1^3, 2^2)$	10_{139}		151
$(1^4, 2, -1^3, 2^2)$	10_{143}		152
$(1^4, -2, 1^3, 2^2)$	9_9		153
$(1^4, -2, 1^3, -2^2)$	10_{62}		154
$(1^4, -2, -1^3, -2^2)$	10_{141}		155
$(1^4, 2, -1^2, 2, -1, 2)$	10_{148}		156
$(1^4, -2, 1^2, -2, 1, -2)$	10_{85}		157
$(1^3, 2, -1^3, 2, -1, 2)$	10^3_A		×
$(1^3, -2, 1^3, 2, -1, 2)$	10^3_{52}		158
$(1^3, -2, 1^3, -2, 1, -2)$	10^3_{31}		159
$(1^3, 2, -1^2, 2, -1^2, 2)$	10_{155}		160
$(1^3, -2, 1^2, -2, 1^2, -2)$	10_{100}		161
$(1^5, -2, 1, -2^3)$	10_9		162
$(1^5, -2^2, 1, -2^2)$	10^3_2		163
$(1^4, -2, 1^2, -2^3)$	10^3_8		164
$(1^4, 2, -1, 2, -1, 2^2)$	10_{149}		165
$(1^4, -2, 1, -2, 1, -2^2)$	10_{82}		166
$(1^4, 2, -1, 2^2, -1, 2)$	10^3_{58}		167
$(1^4, -2, 1, -2^2, 1, -2)$	10^3_{35}		168
$(1^4, 2^2, 1^2, 2^2)$	10^3_{62}		×
$(1^4, 2^2, -1^2, 2^2)$	10^3_B		169
$(1^4, -2^2, 1^2, -2^2)$	10^3_{19}		170
$(1^3, -2, 1^3, 2^3)$	9_{16}		171
$(1^3, -2, 1^3, -2^3)$	10_{64}		172
$(1^3, 2, -1^2, 2, -1, 2^2)$	10^3_{60}		×
$(1^3, -2, 1^2, -2, 1, -2^2)$	10^3_{38}		173
$(1^3, -2, 1^2, -2^2, 1, -2)$	10_{94}		174
$(1^3, 2, -1, 2, 1^2, 2^2)$	10_{161}		175
$(1^3, 2, -1, 2, -1^2, 2^2)$	10_{159}		176
$(1^3, -2, 1, -2, 1^2, -2^2)$	10_{106}		177
$(1^3, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)$	10_{112}		178
$(1^3, 2^2, 1^3, 2^2)$	10^3_{64}		179
$(1^3, -2^2, 1^3, -2^2)$	10^3_{21}		180
$(1^2, 2, -1^2, 2, 1^2, 2^2)$	10^3_{73}		×
$(1^2, -2, 1^2, -2, 1^2, -2^2)$	10^3_{41}		181
$(1^2, -2, 1^2, -2, 1, -2, 1, -2)$	10_{116}		182
$(1^2, -2, 1, -2, 1^2, -2, 1, -2)$	10^3_{43}		183
$(1^5, 2, -1, -3, 2, -3)$	9^2_3		184
$(1^5, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_6		185
$(1^4, 2, 1^2, -3, 2, -3)$	10^2_{133}		186
$(1^4, 2, -1^2, -3, 2, -3)$	10^2_{134}		×
$(1^4, -2, 1^2, 3, -2, 3)$	10^2_{38}		187
$(1^4, -2, -1^2, 3, -2, 3)$	10^2_{132}	×	×
$(1^3, 2, 1^3, -3, 2, -3)$	10^2_{141}		188
$(1^3, 2, -1^3, -3, 2, -3)$	10^2_{140}		×
$(1^3, -2, 1^3, 3, -2, 3)$	10^2_{46}		189
$(1^4, -2, 1, -2^4)$	10_{17}		190
$(1^4, -2^2, 1, -2^3)$	10_{48}		191
$(1^3, -2, 1, -2, 1, -2^3)$	10^3_{30}		192
$(1^3, -2, 1, -2^2, 1, -2^2)$	10_{91}		193
$(1^3, -2, 1, -2^3, 1, -2)$	10^3_{33}		194
$(1^3, 2^2, 1^2, 2^3)$	10_{152}		195
$(1^3, -2^2, 1^2, -2^3)$	10_{79}		196
$(1^3, 2^2, -1, 2, -1, 2^2)$	10_{157}		197
$(1^3, -2^2, 1, -2, 1, -2^2)$	10_{104}		198

$\mathbf{x}$	L	π	M
$(1^2, -2, 1^2, -2^2, 1, -2^2)$	10_{99}		199
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2^2)$	10^3_{42}		200
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -2^2, 1, -2)$	10_{118}		201
$(1^2, -2, 1, -2^2, 1^2, -2^2)$	10_{109}		202
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)$	10_{123}		203
$(1^4, 2, -1, 2, -3, 2, -3)$	9^2_7		204
$(1^4, -2, 1, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{11}		205
$(1^4, -2, 1, -2, -3, 2, -3)$	9^2_4		206
$(1^4, 2, -1, -3, 2^2, -3)$	9^2_{27}		207
$(1^4, -2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^2_{56}		208
$(1^3, 2, 1^2, 2, -3, 2, -3)$	10^2_{136}		209
$(1^3, 2, -1^2, 2, -3, 2, -3)$	10^2_{139}		210
$(1^3, -2, 1^2, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{44}		211
$(1^3, -2, -1^2, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{138}		212
$(1^3, 2, 1^2, -3, 2^2, -3)$	10^2_{169}		213
$(1^3, 2, -1^2, -3, 2^2, -3)$	10^2_{163}		214
$(1^3, -2, 1^2, 3, -2^2, 3)$	10^2_{76}		215
$(1^3, -2, -1^2, 3, -2^2, 3)$	10^2_{162}		216
$(1^3, 2, -1, 2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{135}		×
$(1^3, 2, -1, 2, -1, -3, 2, -3)$	10^2_{155}		217
$(1^3, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{88}		218
$(1^3, 2, 1, 3, -2, 1, 3, 2)$	9^2_{45}	×	×
$(1^3, 2, 1, -3, 2, 1, -3, 2)$	10^2_{128}	×	×
$(1^3, 2, -1, 3, -2, 1, 3, -2)$	9^2_{56}	×	×
$(1^3, 2, -1, 3, -2, -1, 3, 2)$	9^2_{47}	×	×
$(1^3, 2, -1, -3, 2, 1, -3, -2)$	10^2_{160}	×	×
$(1^3, 2, -1, -3, 2, -1, -3, 2)$	10^2_{154}		×
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2)$	10^2_{94}		219
$(1^3, -2, 1, -3, 2, 1, -3, -2)$	10^2_{124}	×	×
$(1^2, 2, -1^2, 2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{137}		220
$(1^2, -2, 1^2, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{98}		221
$(1^2, 2, 1^2, -3, -2, 1, -2, -3)$	10^2_{176}		222
$(1^2, 2, -1^2, -3, -2, 1, -2, -3)$	9^2_{58}		223
$(1^2, -2, 1^2, 3, 2, -1, 2, 3)$	10^2_{177}		224
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{110}		225
$(1^4, 2, -1, -3, 2, -3^2)$	9^2_6		226
$(1^4, -2, 1, 3, -2, 3^2)$	10^2_{10}		227
$(1^3, -2, 1^2, 3, -2, 3^2)$	10^2_{42}		228
$(1^3, -2, 1, -2^2, 3, -2, 3)$	10^2_{18}		229
$(1^3, -2, 1, -2^2, -3, 2, -3)$	9^2_9		230
$(1^3, 2, -1, 2, 3, 2^2, 3)$	9^2_{48}	×	×
$(1^3, 2, -1, 2, -3, 2^2, -3)$	9^2_{18}		231
$(1^3, -2, 1, -2, 3, 2^2, 3)$	10^2_{125}	×	×
$(1^3, -2, 1, -2, 3, -2^2, 3)$	10^2_{31}		232
$(1^3, -2, 1, 3, -2^3, 3)$	10^2_{63}		233
$(1^3, 2^2, -1, 2, -3, 2, -3)$	9^2_{26}		234
$(1^3, -2^2, 1, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{41}		235
$(1^3, -2^2, 1, -2, -3, 2, -3)$	9^2_8		236
$(1^3, 2^2, 1, 3, 2^2, 3)$	10^4_{12}	×	×
$(1^3, 2^2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^4_{11}		×
$(1^3, 2^2, 1, -3, 2^2, -3)$	10^4_{10}		×
$(1^3, 2^2, -1, -3, 2^2, -3)$	9^4_1		×
$(1^3, -2^2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^4_2		×
$(1^3, 2^3, 1, 3, -2, 3)$	9^2_{22}		237
$(1^3, 2, -3, 2, -1, 2, -3, 2)$	9^2_{38}		238
$(1^3, -2, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	10^2_{90}		239
$(1^2, 2, -1^2, 2^2, 3, -2, 3)$	9^2_{46}	×	×
$(1^2, 2, -1^2, 2^2, -3, 2, -3)$	10^2_{129}	×	×
$(1^2, -2, 1^2, -2^2, 3, -2, 3)$	10^2_{35}		240
$(1^2, -2, 1^2, -2^2, -3, 2, -3)$	9^2_{16}		241
$(1^2, 2, 1^2, 2, 3, 2^2, 3)$	10^4_A	×	×
$(1^2, 2, 1^2, 2, 3, -2^2, 3)$	10^4_B	×	×
$(1^2, 2, 1^2, 2, -3, 2^2, -3)$	10^4_C	×	×
$(1^2, 2, -1^2, 2, -3, 2^2, -3)$	10^4_D	×	×
$(1^2, -2, 1^2, -2, 3, -2^2, 3)$	10^4_6		242
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2^3, -3)$	10^2_{167}	×	×
$(1^2, 2, 1^2, -3, -2^3, -3)$	9^2_{60}		×
$(1^2, -2, 1^2, 3, 2^3, 3)$	9^2_{30}		243
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2^3, 3)$	10^2_{74}		244
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{85}		245
$(1^2, 2, -1, 2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^2_{170}		×
$(1^2, -2, 1, -2, 1, 3, 2^2, 3)$	10^2_{172}		×
$(1^2, -2, 1, -2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^2_{107}		246
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -3, 2^2, -3)$	10^2_{174}		×
$(1^2, 2, -1, 2^2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{156}		×
$(1^2, -2, 1, -2^2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{101}		247

$\mathbf{x}$	L	π	M
$(1^2, 2, -1, 2, 3, 2, -1, 2, 3)$	10^2_{179}		$\times$
$(1^2, 2, -1, 2, -3, 2, -1, 2, -3)$	10^2_{175}		$\times$
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{118}		248
$(1^2, -2, 1, -2, -3, -2, 1, -2, -3)$	10^2_{183}		249
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 1, 3, -2)$	10^2_{93}		250
$(1^2, -2, 1, -2, -3, 2, 1, -3, -2)$	9^2_{36}		251
$(1^2, -2, 1, 3, 2, -1, 2^2, 3)$	10^2_{142}		252
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, -2^2, 3)$	10^2_{108}		253
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	10^2_{117}		254
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2^2)$	10^2_{97}		255
$(1^2, 2, -1, 3, 2^2, 1, 3, -2)$	10^4_{15}		256
$(1^2, 2, -1, -3, 2^2, 1, -3, -2)$	10^4_{13}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1, 3, 2^2, 1, 3, -2)$	10^4_{19}		257
$(1^2, -2, 1, 3, -2^2, 1, 3, -2)$	10^4_{8}		258
$(1^2, -2, 1, -3, 2^2, 1, -3, -2)$	10^4_{20}		259
$(1^2, 2^2, 1^2, 2, -3, 2, -3)$	10^2_{165}		$\times$
$(1^2, -2^2, 1^2, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{72}		260
$(1^2, -2^2, 1^2, -2, -3, 2, -3)$	9^2_{17}		261
$(1^2, 2^2, 1^2, 3, 2^2, 3)$	10^4_{16}		262
$(1^2, 2^2, 1^2, 3, -2^2, 3)$	10^4_{14}		$\times$
$(1^2, 2^2, 1^2, -3, 2^2, -3)$	10^4_{17}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2^2, 1^2, 3, -2^2, 3)$	10^4_{4}		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{114}		263
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, -3)$	10^2_{180}		264
$(1, 2, -1, 2, 1, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{181}		265
$(1, 2, -1, 2, 1, -3, -2, 1, -2, -3)$	$10^2_{178} = 10^2_{182}$		266
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{120}		267
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, -2, 1, -2, -3)$	10^2_{184}		268
$(1^3, -2, 1, -2, 3, -2, 3^2)$	10^2_{19}		269
$(1^3, 2, -1, -3, 2^2, -3^2)$	9^2_{28}		270
$(1^3, -2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	10^2_{64}		271
$(1^3, 2, -1, -3, 2, -3, 2, -3)$	9^2_{33}		272
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{81}		273
$(1^2, 2, 1^2, 2, -3, 2, -3^2)$	10^2_{130}	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, 2, -3, 2, -3^2)$	10^2_{131}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, -2, 3, -2, 3^2)$	10^2_{37}		$\times$
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2^2, -3^2)$	10^2_{168}	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, -3, 2^2, -3^2)$	10^2_{161}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2^2, 3^2)$	10^2_{75}		$\times$
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2, -3, 2, -3)$	10^4_{18}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2, 3, -2, 3)$	10^4_{7}		$\times$
$(1^2, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3^2)$	10^2_{86}		274
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{119}		275
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3^2, -2)$	10^2_{91}		276
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 3^3)$	10^2_{17}		277
$(1^3, -2, 1, 3^2, -2, 3^2)$	10^2_{30}		278
$(1^2, -2, 1^2, 3^2, -2, 3^2)$	10^4_{5}		279
$(1^3, 2, -1, -3, 2, 4, -3, 4)$	9_{15}		280
$(1^3, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)$	10_{29}		281
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	10^3_{49}	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	10^3_{48}	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2, -4, 3, -4)$	10^3_{5}		282
$(1^2, -2, 1, -2^3, 3, -2, 3)$	10^2_{26}		283
$(1^2, 2, -1, 2^2, -3, 2^2, -3)$	9^2_{15}		$\times$
$(1^2, -2, 1, -2^2, 3, -2^2, 3)$	10^2_{36}		$\times$
$(1^2, -2, 1, 3, -2^4, 3)$	10^2_{62}		284
$(1^2, -2^2, 1, -2^2, 3, -2, 3)$	10^2_{43}		285
$(1^2, -2^2, 1, -2, 3, -2^2, 3)$	10^2_{79}		286
$(1^2, 2^2, 1, 3, 2^3, 3)$	10^2_{149}		287
$(1^2, 2^2, 1, 3, -2^3, 3)$	10^2_{144}		$\times$
$(1^2, 2^2, 1, -3, 2^3, -3)$	10^2_{143}		$\times$
$(1^2, 2^2, 1, -3, -2^3, -3)$	10^2_{150}		$\times$
$(1^2, -2^2, 1, 3, 2^3, 3)$	10^2_{145}		$\times$
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2^3, 3)$	10^2_{50}		$\times$
$(1^2, -2^3, 1, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{48}		288
$(1, -2, 1, -2, 1, -2^2, 3, -2, 3)$	10^2_{83}		289
$(1, -2, 1, -2, 1, -2^2, -3, 2, -3)$	9^2_{32}		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2^3, 3)$	10^2_{104}		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, -2^3, -3)$	10^2_{A}		$\times$

$\mathbf{x}$	L	π	M
$(1, -2, 1, -2^2, 1, 3, 2^2, 3)$	10^2_{171}		$\times$
$(1, -2, 1, -2^2, 1, 3, -2^2, 3)$	10^2_{106}		$\times$
$(1, -2, 1, -2^2, 1, -3, 2^2, -3)$	10^2_{173}		$\times$
$(1, -2, 1, -2^3, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{87}		290
$(1, 2, -1, 2^2, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{158}		291
$(1, -2, 1, -2^2, 3, -2, 1, -2, 3)$	10^2_{115}		292
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 1, -2^2, 3)$	10^2_{116}		293
$(1, -2, 1, 3, -2^2, 1, -2^2, 3)$	10^2_{109}		294
$(1^2, -2, 1, -2^2, 3, -2, 3^2)$	10^2_{27}		295
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2^2, 3^2)$	10^2_{45}		296
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{84}		297
$(1^2, -2, 1, 3, 2^3, 3^2)$	9^2_{24}		298
$(1^2, -2, 1, 3, -2^3, 3^2)$	10^2_{66}		299
$(1^2, 2^2, 1, 3, 2^2, 3^2)$	10^2_{151}		300
$(1^2, 2^2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	10^2_{148}		301
$(1^2, 2^2, 1, -3, 2^2, -3^2)$	10^2_{147}		302
$(1^2, 2^2, 1, -3, -2^2, -3^2)$	10^2_{152}		303
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	10^2_{54}		304
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	10^2_{105}		$\times$
$(1^2, -2, 3, -2, 1, -2, 3^2, -2)$	10^2_{96}		305
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	10^4_{9}		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, -3, 2, -3)$	10^4_{21}		306
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 1, 3, -2, 3)$	10^2_{121}		307
$(1^2, 2, -1, 2, 3, -2, -4, 3, -4)$	8_{1}		308
$(1^2, 2, -1, 2, -3, 2, 4, -3, 4)$	9_{21}		309
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	10_{42}		310
$(1^2, -2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)$	9_{8}		311
$(1^2, -2, 1, 3, 2^2, -4, 3, -4)$	9_{25}		312
$(1^2, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	10_{71}		313
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)$	10^3_{29}		314
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, 4, -3, 4)$	10^3_{61}	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1, -3, 2, -3, 4, -3, 4)$	9_{14}		315
$(1^2, 2, -1, -3, 2, -3, -4, 3, -4)$	8_{3}		316
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 3, 4, -3, 4)$	9_{12}		317
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 3, -4, 3, -4)$	10_{44}		318
$(1^2, -2, 1, 3, -2, -4, 3^2, -4)$	10^3_{12}		$\times$
$(1^2, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4^2)$	10_{43}		319
$(1, -2, 1, -2^4, 3, -2, 3)$	10^2_{25}		320
$(1, -2, 1, -2^3, 3, -2^2, 3)$	10^2_{34}		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 3, -2^4, 3)$	10^2_{39}		321
$(1, -2, 1, 3, -2^5, 3)$	10^2_{55}		322
$(1, -2^2, 1, -2, 3, -2^3, 3)$	10^2_{78}		$\times$
$(1, -2^2, 1, 3, -2^4, 3)$	10^4_{1}		$\times$
$(1, 2^3, 1, -3, 2^3, -3)$	10^2_{146}		323
$(1, -2^3, 1, 3, -2^3, 3)$	10^2_{52}		324
$(1, -2^3, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	10^2_{100}		325
$(1, -2^2, 3, -2, 1, -2^2, 3, -2)$	10^2_{103}		326
$(1, -2^2, 3, -2, 1, -2, 3, -2^2)$	10^2_{112}		327
$(1, -2, 1, -2^2, 3, -2, -4, 3, -4)$	10_{41}		328
$(1, -2, 1, -2^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	9_{19}		329
$(1, -2, 1, -2, 3, 2^2, -4, 3, -4)$	10_{137}		330
$(1, -2, 1, -2, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	10_{59}		331
$(1, -2, 1, -2, -3, 2^2, 4, -3, 4)$	10_{136}		332
$(1, -2, 1, -2, -3, -2^2, 4, -3, 4)$	10_{138}		333
$(1, -2, 1, 3, 2^3, -4, 3, -4)$	10_{54}		334
$(1, -2, 1, 3, -2^3, -4, 3, -4)$	10_{70}		335
$(1, -2^2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	10^3_{6}		336
$(1, -2^2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)$	9^3_{7}		337
$(1, 2^2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	10^3_{53}		338
$(1, -2^2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	10^3_{10}		339
$(1, -2^2, 1, -3, -2^2, 4, -3, 4)$	10^3_{54}		340
$(1, -2, 3, -2, 1, -2, -4, 3, -2, -4)$	10^3_{37}		341
$(1, -2, -3, -2, 1, -2, 4, -3, -2, 4)$	10^3_{59}	$\times$	$\times$
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 3, -4, 3, -4)$	10_{45}		342
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3^2, -4)$	10^3_{13}		$\times$
$(1, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3^2, -4)$	10^3_{24}		343
$(1, -2, 1, 3, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	10_{88}		344
$(1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -2, -4, 3)$	10^3_{34}		345
$(1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, 5, -4, 5)$	10^2_{23}		346