

種数1の単純特異レフシェッツ束を許容する4次元多様体について

早野 健太 (大阪大学(学振特別研究員PD))*

概要

単純特異レフシェッツ束とは4次元多様体から2次元球面への可微分写像で、特異点の様子やファイバーに関するいくつかの条件を満たすものであり、全ての有向4次元閉多様体が許容し得るファイバー構造である。本稿では、この写像の消滅サイクルに着目することにより、ファイバーの種数が小さい単純特異レフシェッツ束の、全空間として現れ得る4次元多様体を分類する方法について解説する。

1. 序

単純特異レフシェッツ束とは4次元多様体から2次元球面への可微分写像で、特異点として不定値折り目特異点とレフシェッツ特異点しか持たず、さらにファイバーのトポロジーや特異点の大域的な様子がある意味で“単純”であるものである。この写像は、Auroux-Donaldson-Katzarkov [1]により、near-symplectic 構造に適合するファイバー構造として導入された特異レフシェッツ束のうち扱いやすいものとして、Baykur [2]によって定義されたものである。レフシェッツ束と同様に、単純特異レフシェッツ束はモノドロミー表現を介して組み合わせ的に扱うことができるが、その一方で全ての有向連結4次元閉多様体が単純特異レフシェッツ束を許容するということが[14]で示されており、シンプレクティック多様体しか許容し得ないレフシェッツ束とは異なる様相を呈するということが知られている。

一般ファイバーの種数を見ることにより、単純特異レフシェッツ束の種数が定義できる。Kas [10]とMoishezon [12]は独立に、球面上の種数1のレフシェッツ束の全空間は、楕円曲面 $E(n)$ をブローアップしたものに微分同相であるということを示している¹。この定理の一般化として、種数1の単純特異レフシェッツ束に関する次の定理を得た。

定理 1.1 (H. [8]). 以下の多様体は種数1の単純特異レフシェッツ束で、不定値折り目特異点を持ち、レフシェッツ特異点を l 個持つものを許容する：

1. $\#k\mathbb{C}P^2 \#(l-k)\overline{\mathbb{C}P^2}$, ただし, $0 \leq k \leq l-1$;
2. $\frac{l}{2}S^2 \times S^2$;
3. $S^1 \times S^3 \#S \#l\overline{\mathbb{C}P^2}$, ただし, S は S^2 上の S^2 束 ;
4. $L \#l\overline{\mathbb{C}P^2}$, ただし, L は Pao [13] によって定義された4次元多様体 L_n あるいは L'_n .

逆に, $f: X^4 \rightarrow S^2$ を不定値折り目特異点を持つ種数1の単純特異レフシェッツ束とし, f が持つレフシェッツ特異点の個数を l とする。このとき, 全空間 X は上記の多様体のいずれかと微分同相である。

本研究は科研費(課題番号:24-993)の助成を受けたものである。

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1 大阪大学理学研究科数学専攻

e-mail: k-hayano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

web: http://cr.math.sci.osaka-u.ac.jp/~k-hayano/index_jp.html

¹ 彼らはより強く、任意の種数1のレフシェッツ束は、 $E(n)$ をブローアップしたものに定まる標準的なレフシェッツ束と、レフシェッツ束として同型(すなわち右左同値)であるということを示している。

注意 1.2. $\pi_1(S^1 \times S^3) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を γ で表す. Pao によって定義された多様体 L_n, L'_n はいずれも, $S^1 \times S^3$ に, γ^n を代表する埋め込まれた円周に沿って手術を行うことにより得られ, 2つの多様体の差は手術を行う際の枠の違いに起因する. n が奇数のときこの差はなく L_n と L'_n は微分同相であるが, n が偶数のときこれらは微分同相ではなく, 実際 L_n はスピン構造を許容するが, L'_n はスピン構造を許容しない.

注意 1.3. 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の全空間の分類問題は Baykur-鎌田 [4] において初めて取り扱われており, 実際彼らは, 単連結 4次元多様体 X^4 が種数 1 の単純特異レフシェッツ束で不定値折り目特異点を持つものを許容するとき, X^4 を有限回ブローアップすれば, $\#n\mathbb{C}P^2 \#m\overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相になるということを示している. また定理 1.1 は, レフシェッツ特異点の個数が少ない場合 [6] や, 全空間がスピン構造を許容する場合 [7] では既に示されていた.

本稿の構成は次の通りである. まず第2節で特異レフシェッツ束, 単純特異レフシェッツ束の定義を与え, Hurwitz サイクル系列という, 単純特異レフシェッツ束から得られる曲面上の単純閉曲線の列を導入する. さらにこの列を用いて単純特異レフシェッツ束を, 写像類群を用いて組み合わせた扱いができるということを見ていく. 第3節で主定理の証明の概要を説明する. 特に第2で導入した Hurwitz サイクル系列を, 主定理の証明に活用する方法に重点をおいて説明する.

2. 単純特異レフシェッツ束とそのモノドロミー

以下, 本稿では多様体は全て有向, 可微分, 連結, コンパクトであるとし, 多様体の右上の添え字は実次元を表すものとする. また多様体間の写像は全て可微分であると仮定する. 多様体間の写像 $f: M \rightarrow N$ に対し, $\text{Crit}(f)$ で f の特異点全体を表す, すなわち, $\text{Crit}(f) = \{p \in M \mid df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N \text{ は全射でない}\}$ とする.

2.1. 特異レフシェッツ束と単純特異レフシェッツ束

まず特異レフシェッツ束に現れる 2種類の特異点を定義する.

定義 2.1. $f: X^4 \rightarrow \Sigma^2$ を 4次元多様体から 2次元多様体への可微分写像とし, $p \in \text{Crit}(f)$ とする.

1. p の周りの, p を原点とする X の向きに適合する複素局所座標 (z_1, z_2) と, $f(p)$ の周りの Σ の向きに適合する複素局所座標 ξ がとれ, この局所座標により f が以下のように表されるとき, p を **レフシェッツ特異点 (Lefschetz singularity)** という:

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2.$$

2. p の周りの, p を原点とする X の実局所座標 (t, x, y, z) と, $f(p)$ の周りの Σ の実局所座標 (s, w) がとれ, この局所座標により f が以下のように表されるとき, p を **不定値折り目特異点 (indefinite fold singularity)** という:

$$(t, x, y, z) \mapsto (t, x^2 + y^2 - z^2).$$

定義 2.2. 4次元多様体から 2次元多様体への可微分写像 $f: X^4 \rightarrow \Sigma^2$ が次の条件を満たすとき, f を **特異レフシェッツ束 (broken Lefschetz fibration)** という:

1. f はレフシェッツ特異点と不定値折り目特異点しか持たない;

2. $f^{-1}(\partial\Sigma) = \partial X$.

不定値折り目特異点を持たない特異レフシェッツ束を特に、**レフシェッツ束 (Lefschetz fibration)** という。

特異レフシェッツ束に現れる2種類の特異点の局所的な性質を見ていく。まずレフシェッツ特異点は X 内の有限個の点からなり、その像も有限集合となる。正則値と臨界値を結ぶ道 α を、片側の端点以外に f の臨界値を含まないようにとる (図1左参照)。この道に沿って f の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけたとき (厳密には、 f を正則点全体に制限したものの水平分布 \mathcal{H} を適当にとり、道 α の速度ベクトル場を \mathcal{H} で持ち上げ、その積分曲線を用いて正則ファイバーを特異ファイバーに近づける)、正則ファイバー上のある単純閉曲線 c が、特異ファイバーに到達したとき1点に潰れる。このとき現れる単純閉曲線 c を、**レフシェッツ特異点の消滅サイクル (vanishing cycle of Lefschetz singularity)** という。消滅サイクルは正則値と臨界値を結ぶ道 α の取り方に依存するが、道を一固定すると、消滅サイクルのイソトピー類は正則ファイバーの近づけ方 (つまり水平分布の取り方) に依らない。上述のようにして得られる単純閉曲線のイソトピー類のことも、消滅サイクルと呼ぶことにする。

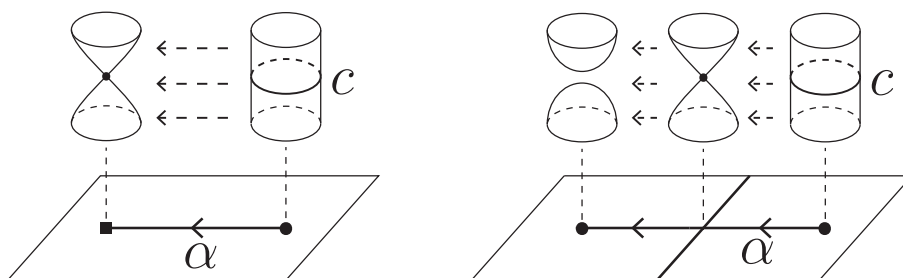


図 1: 左：レフシェッツ特異点²。右：不定値折り目特異点。

不定値折り目特異点全体は X の1次元部分多様体となり、その像も Σ の1次元部分多様体となる。不定値折り目特異点の像と1点で横断的に交わる道 α を一つとる (図1右参照)。レフシェッツ特異点の場合と同様に、正則ファイバーを道 α に沿って特異ファイバーに近づけると、正則ファイバー上のある単純閉曲線 c が特異ファイバーで1点に潰れ、その後特異ファイバーを通過すると消滅する。このとき現れる単純閉曲線 c を、**不定値折り目特異点の消滅サイクル (vanishing cycle of indefinite fold singularity)** という。不定値折り目特異点の消滅サイクルのアイソトピー類も、道 α から一意に定まり、これも消滅サイクルと呼ぶ。

$f : X^4 \rightarrow S^2$ を球面上の特異レフシェッツ束とし、 $C_f, Z_f \subset X$ でそれぞれ f のレフシェッツ特異点、不定値折り目特異点全体を表すとする。以下の条件を満たすと仮定する：

- a. Z_f は連結で、 $f|_{Z_f}$ は単射；
- b. f のファイバー (すなわち1点の逆像) は連結。

Z_f が空でないとき、条件 a. より $\nu f(Z_f)$ は埋め込まれた円周で特に球面を2つの円板 D_h と D_l に分割し、さらに不定値折り目特異点の局所的な性質と条件 b. から、一方の

²以下本稿では違いを明確にするため、正則値は丸、レフシェッツ特異点の像は四角で表すこととする。

円板 D_h 上の一般ファイバーの種数は、他方の円板 D_l 上の一般ファイバーの種数よりちょうど1大きくなる (図2参照). $f^{-1}(D_h)$ (resp. $f^{-1}(D_l)$) を f の **higher side** (resp. **lower side**) という.

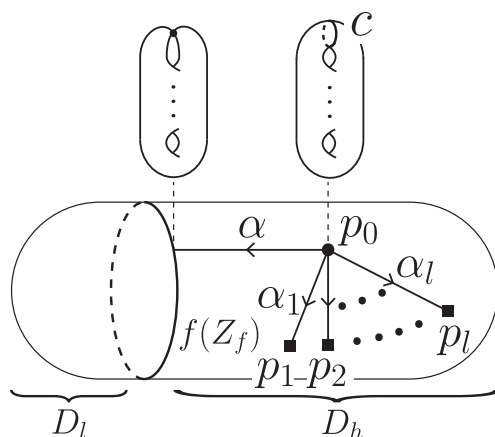


図 2: 単純特異レフシェツ束のファイバー, 特異点の様子.

定義 2.3. 特異レフシェツ束 $f: X^4 \rightarrow S^2$ が条件 a, b を満たし, さらに次の条件 c. も満たすとき, f を **単純特異レフシェツ束 (simplified broken Lefschetz fibration)** という.

c. Z_f が空でないとき, C_f は f の higher side に含まれる.

また, higher side に含まれる一般ファイバーの種数 g を, f の **種数 (genus of f)** という.

注意 2.4. 第1節でも述べた通り, 任意の4次元閉多様体が単純特異レフシェツ束を許容するということが知られており, 実際より強く, 任意の写像 $f: X^4 \rightarrow S^2$ はある単純特異レフシェツ束とホモトピックであるということが示されている (詳しくは [14] を参照).

2.2. 単純特異レフシェツ束の Hurwitz サイクル系列

$f: X^4 \rightarrow S^2$ を不定値折り目特異点を持つ種数 g の単純特異レフシェツ束とし, $C_f = \{p_1, \dots, p_l\}$ とする. $p \in X^4$ を f の higher side の像に含まれる正則値とし, 同一視 $f^{-1}(p) \cong \Sigma_g$ を固定する (ただし Σ_g は種数 g の閉曲面). p と不定値折り目特異点の像 $f(Z_f)$ 上の点を結び, $f(Z_f)$ と横断的に交わる道 α を一つとり, また p と p_i を結び正則値全体の集合を通る道 α_i を, α_i と $\alpha_j (i \neq j)$ は p 以外では交わらず, p のまわりに $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ がこの順で反時計回りに並ぶようにとる (図2参照). 前節で述べた通り, これらの道はそれぞれの特異点の消滅サイクル $c, c_1, \dots, c_l \subset f^{-1}(p) \cong \Sigma_g$ を与える. このようにして得られる消滅サイクルの列 $(c; c_1, \dots, c_l)$ を W_f で表し, この列を f の **Hurwitz サイクル系列 (Hurwitz cycle system)** という.

$\text{Mod}(\Sigma_g)$ を種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群, すなわち, Σ_g の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体からなる群とする³. Σ_g 内の非分離単純閉曲線のイソトピー類 c に対し, $\text{Mod}(\Sigma_g)(c)$ で c を保つ元全体からなる $\text{Mod}(\Sigma_g)$ の部分群とする. 準同型 $\Phi_c: \text{Mod}(\Sigma_g)(c) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g-1})$ を次のように定義する: まず $\varphi \in \text{Mod}(\Sigma_g)(c)$ に対

³本稿では $\text{Mod}(\Sigma_g)$ の群構造は写像の合成を以て定義するものとする.

し c の代表元 \tilde{c} の正則近傍 $\nu\tilde{c}$ を保つ代表元 $T : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ をとる. T は \tilde{c} を保つから $\Sigma_g \setminus \nu\tilde{c}$ に自己微分同相を誘導する. $\Sigma_g \setminus \nu\tilde{c}$ の2つの境界成分にそれぞれ円板を貼り Σ_{g-1} を得て, T の制限をそこに拡張する. 拡張した微分同相写像 \tilde{T} のイソトピー類を $\Phi_c(\varphi) \in \text{Mod}(\Sigma_{g-1})$ とする (図3参照).

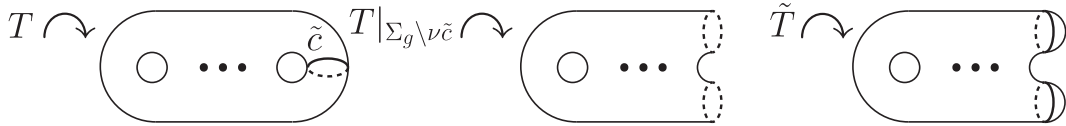


図 3: 準同型 Φ_c の定義.

Σ_g 内の単純閉曲線のイソトピー類 c に対し, 写像類群の元 $t_c \in \text{Mod}(\Sigma_g)$ を次のように定義する: t_c の代表元は c の正則近傍に台を持ち, c を保つが c の代表元 \tilde{c} と横断的に1点で交わる弧を下図のように変形する. 以上の条件から微分同相写像のイソトピー

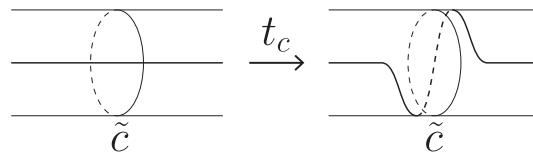


図 4: Dehn twist を代表する微分同相写像の c の周りでの様子.

類が一意に定まり, これを c に沿う **Dehn twist** という. 次の定理により, 単純特異レフシェッツ束を, Hurwitz サイクル系列を介して組み合わせ的に扱うことができるということがわかる.

定理 2.5 ([1], [2]). $f : X^4 \rightarrow S^2$ を不定値折り目特異点を持つ種数 g の単純特異レフシェッツ束, $W_f = (c; c_1, \dots, c_l)$ をその Hurwitz サイクル系列とする. このとき, 以下が成立する:

$$t_{c_l} \cdot t_{c_{l-1}} \cdots t_{c_1} \in \text{Ker}(\Phi_c). \quad (1)$$

逆に, Σ_g 内の単純閉曲線の列 $(c; c_1, \dots, c_l)$ が条件 (1) を満たすとき, 種数 g の単純特異レフシェッツ束 $f : X \rightarrow S^2$ で, f から得られる Hurwitz サイクル系列が $(c; c_1, \dots, c_l)$ となるものが存在する.

注意 2.6. f の Hurwitz サイクル系列 W_f は道 $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ と同一視 $f^{-1}(p_0) \cong \Sigma_g$ の取り方に依存する. しかしながら以下の2つの変形およびその逆変形の差を除けば, Hurwitz サイクル系列に現れる消滅サイクルのイソトピー類は f の同型類 (右左同値類) から一意に定まる⁴:

- (E) $(c; \dots, c_i, c_{i+1}, \dots) \rightarrow (c; \dots, c_{i+1}, t_{c_{i+1}}(c_i), \dots)$;
- (C) $(c; c_1, \dots, c_l) \rightarrow (h(c); h(c_1), \dots, h(c_l))$ ($h \in \text{Mod}(\Sigma_g)$).

逆に g が3以上であれば, 条件 (1) を満たす単純閉曲線の列の上述の変形による同値類から, 単純特異レフシェッツ束の同型類が一意に定まる ([3]). 種数が2以下の場合,

⁴変形 (E) を初等変換 (elementary transformation) といい, 変形 (C) を h による同時共役 (simultaneous conjugation) という.

一般ファイバーに現れる曲面に沿う対数変換や Gluck twist により, Hurwitz サイクル系列を変えることなくファイバー構造を変形することができるが(このとき全空間の微分同相類も変化し得る), この変形により得られるファイバー構造は対数変換や Gluck twist の際の貼り合わせの選び方で決まり, その選び方はそれぞれ $\pi_1(\text{Diff}^+(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ や $\pi_1(\text{Diff}^+(S^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の分しかない.

3. 主定理の証明の概略

定理 1.1 の後半部分の証明(種数 1 の単純特異レフシェッツ束の全空間の分類)は, レフシェッツ特異点の個数に関する帰納法により行う. レフシェッツ特異点を持たない場合は直接全空間のハンドル分解をとり, 一般の場合はファイバー構造をホモトピーにより変形した後, 適当な手術によりレフシェッツ特異点の個数を減らす. 定理 1.1 の前半部分の証明(主張にある多様体上の, 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の構成)は, 帰納法の仮定に帰着させるための手術を施すことができるように Hurwitz サイクル系列の候補を与え, その候補を実現する単純特異レフシェッツ束が存在するというを, 定理 2.5 を用いて示す.

$f: X \rightarrow S^2$ を, 不定値折り目特異点を持つ種数 1 の単純特異レフシェッツ束とする. 注意 2.6 で述べた通り, f の Hurwitz サイクル系列は道 α, α_i や同一視 $f^{-1}(p_0) \cong T^2$ の取り方に依存するが, 2つの異なる f の Hurwitz サイクル系列は, 注意 2.6 にある 2種類の変形 (E) と (C) により移りあうのであった. 単純閉曲線の列の, 変形 (E) と (C) による同値類は, **チャート (chart)** と呼ばれる有向グラフを用いて表すことができる(詳しくは例えば [9] を参照). 単純閉曲線の列の同値類をチャートを用いて表示したとき, 道 α, α_i の取り方の差は, グラフの“見方”の違いに言い換えられ, また同一視の取り方の差もグラフの簡単な変形に言い換えられるので, (E) と (C) に由来する複雑な同値関係を効率よく扱うことが可能になる. この表示と定理 2.5 を用いて, 次の補題を証明することができる.

補題 3.1 ([6]). $f: X \rightarrow S^2$ を不定値折り目特異点を持つ種数 1 の単純特異レフシェッツ束とし, f のレフシェッツ特異点の消滅サイクルは全て本質的である (null-homotopic ではない) とする. このとき, 道 α, α_i と同一視 $f^{-1}(p_0) \cong T^2$ で, 対応する f の Hurwitz サイクル系列が次のようになるものが存在する:

$$(c; \underbrace{c, \dots, c}_{r \text{ 個の } c}, t_d^{n_1}(c), \dots, t_d^{n_s}(c)), \quad (2)$$

ただし, c, d は $H_1(T^2; \mathbb{Z})$ の生成系を代表する単純閉曲線であり, r, n_i は整数である.

この補題より, 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の Hurwitz サイクル系列には, (2) のような“標準形”といえるものの存在がわかるが, 逆に勝手に r, n_i を与えて (2) にあるような単純閉曲線の列を与えても, それが定理 2.5 にある条件 (1) を満たすとは限らず, r, n_i は条件 (1) に由来する何らかの条件を満たすはずである. 列 (2) が条件 (1) を満たすための, r, n_i に関する必要十分条件は著者にはわからないが, トーラスの写像類群の性質⁵と, 消滅サイクルとハンドル分解との関係を用いることにより次の補題を示すことができ, 後で見るように定理 1.1 を示すためにはこれで十分である.

⁵ トーラスの写像類群 $\text{Mod}(T^2)$ は $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ と同型であり, さらに $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$ は自由積 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型であるということが知られている. この自由積の語の問題を簡単に解くことができるということが, 補題 3.2 の証明で用いられている.

補題 3.2. 列(2)が条件(1)を満たすとし、さらに $s > 0$ と仮定する。このとき、次が成立する：

- A. s は2以上(すなわち1ではない)；
- B. $n_i - n_{i+1}$ が1, 2, 3のいずれかになる i が少なくとも一つ存在する；
- C. 対応する種数1の単純特異レフシェッツ束の全空間は単連結。

定理 1.1 の後半の主張の証明の概略： 種数1の単純特異レフシェッツ束の全空間として現れ得る多様体を決定する(これで後半の主張が示される)。 $f : X \rightarrow S^2$ を不定値折り目特異点を持つ種数1の単純特異レフシェッツ束とし、 l 個のレフシェッツ特異点を持つと仮定する。

Case 1: $l = 0$ のとき： f の全空間は higher side $f^{-1}(D_h)$, lower side $f^{-1}(D_l)$ と、不定値折り目特異点の像の近傍の逆像 $f^{-1}(\nu f(Z_f))$ に分割することができるが、レフシェッツ特異点を持たないという仮定から、 f の higher side, lower side はそれぞれ $D^2 \times T^2$, $D^2 \times S^2$ と微分同相である。さらに、不定値折り目特異点は不定値のモース特異点の1助変数族とみなすことができ、このことを用いれば、 $f^{-1}(\nu f(Z_f))$ を $D^2 \times T^2$ に貼る操作は、**round 2-handle** の貼り合わせと同値であるということが示せる (round handle や、それと不定値折り目特異点との関係について詳しくは [2] を参照せよ)。以上のことから全空間 X のハンドル分解を得られる。こうして得られる可能性のあるハンドル分解に対応するカービィ図式を全て描き、カービィ計算により図式を単純にすることで、 X は S^4 , Pao の多様体 L_n または L'_n , $S \# S^1 \times S^3$ のいずれかと微分同相であるということがわかる。

Case 2: l が1以上のとき： まず f が消滅サイクルが本質的ではないレフシェッツ特異点を持つとき、 (-1) -球面を含む f の特異ファイバーが存在するということがわかる。この球面に沿って、ファイバー構造を保ちながらブローダウンできるということが知られており、さらにこの操作でレフシェッツ特異点の個数は1つ減る⁶。これで帰納法の仮定に帰着でき、主張を示すことができる。

f のレフシェッツ特異点の消滅サイクルが全て本質的であると仮定する。このとき補題 3.1 より、 f の Hurwitz サイクル系列は (2) のようになると仮定できる。 r が0でない⁷と仮定する。このとき消滅サイクルが、不定値折り目特異点の消滅サイクルと平行になるレフシェッツ特異点が存在し、特にこの特異点はホモトピーにより lower side に移すことができる。Lower side の一般ファイバーは球面であり、球面内の任意の単純閉曲線は null-homotopic であるから、前の段落と同様に、ファイバー構造を保ちながらブローダウンし、レフシェッツ特異点の個数を1つ減らすことができる。これで帰納法の仮定に帰着でき主張が従う。

r が0の場合を考える。このとき $s > 0$ であり、さらに補題 3.2 より $s \geq 2$ で、 X は単連結であり、さらある i が存在し、差 $n_i - n_{i+1}$ が1, 2, 3のいずれかになる。この差が1のとき、 f の Hurwitz サイクル系列に変形 (E) を施し、 r が0でない場合に帰着できるということがわかる。差が2のとき、 X が S^2 上の S^2 束を連結輪成分として含み、この連結和成分を手術により、ファイバー構造を保ちながら取り除くことができ、その結果レフシェッツ特異点の個数が2つ減らすことができる。これで帰納法の仮定に帰着させることができる。差が3のとき、ホモトピーによって f を、消滅サイクルが

⁶ この操作について詳しくは例えば [5] の 289 ページを参照

null-homotopic である achiral なレフシェッツ特異点 (すなわち局所的に $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \bar{z}_2$ と表される特異点) を持つ写像に変形することができる. このとき2つ前の段落と同様の議論でブローダウンと同様の操作を, ファイバー構造を保ちながら施すことができるが, このとき例外曲線の自己交差が2つ前の議論で現れたものとは異なり正になるため, $\mathbb{C}P^2$ が連結和成分として現れる. 以上の操作によりレフシェッツ特異点の個数が1つ少ない単純特異レフシェッツ束を得ることができ, 帰納法の仮定に帰着させて主張を証明することができる. これで定理1.1の後半の主張が示される.

定理1.1の前半の主張の証明の概略: これまでの議論の中で, ファイバー構造を保ちながらレフシェッツ特異点の個数を減らす操作がいくつか現れた. 逆にこの操作が施せるように単純閉曲線の列を取り, 定理2.5の条件(1)が満たされることを確認すれば, 定理1.1にある多様体上に単純特異レフシェッツ束を構成することができる (定理2.5により, 条件(1)を満たす単純閉曲線の列があれば単純特異レフシェッツ束を構成できるということに注意する). 以上より定理1.1の前半の主張も示された.

参考文献

- [1] D. Auroux, S. K. Donaldson and L. Katzarkov, *Singular Lefschetz pencils*, Geom. Topol. **9**(2005), 1043–1114
- [2] R. İ. Baykur, *Topology of broken Lefschetz fibrations and near-symplectic 4-manifolds*, Pacific J. Math. **240**(2009), 201–230
- [3] R. İ. Baykur and K. Hayano, in preparation
- [4] R. İ. Baykur and S. Kamada, *Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera*, preprint, arXiv:math.GT/1010.5814
- [5] R. E. Gompf and A.I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999
- [6] K. Hayano, *On genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations*, Algebr. Geom. Topol. **11**(2011), 1267–1322
- [7] K. Hayano, *A note on sections of broken Lefschetz fibrations*, Bull. London Math. Soc. **44**(2012), (4), 823–836
- [8] K. Hayano, *Complete classification of genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations*, preprint
- [9] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matsumoto, K. Waki, Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations, J. Math. Soc. Japan **57**(2005), no.2 537–555
- [10] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 1977, 107–111
- [11] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pacific J. Math. **89**(1980), 89–104
- [12] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag, 1977.
- [13] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifold with effective torus actions. I*, Amer. Math. Soc. **227**(1977), 279–317
- [14] J. D. Williams, *The h-principle for broken Lefschetz fibrations*, Geom. Topol. **14**(2010), no.2, 1015–1063