

Wedge Decomposition of Polyhedral Products

大阪府立大学理学系研究科 入江幸右衛門

概要

空間の直積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ の一般化として Polyhedral Product (多面体積) が 1960 年代より研究されています。特に 1990 年代初頭に Davis と Januszkiewicz が擬トーラス多様体の研究に Polyhedral Product を用いるようになり多くの注目を集めるようになりました。我々は Polyhedral Product のホモトピー型に興味を持ち、Polyhedral Product が懸垂空間の 1 点和に分解する十分条件を与えることが出来ました。ここでは、前半にこの研究の背景である Polyhedral Product と代数との関連を中心にお話し、後半で shellable complex の Alexander dual に対する Polyhedral Product $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$ が懸垂空間の 1 点和に分解することを、各 X_i が連結であるという条件のもとで証明したいと思います。なお、この講演は京都大学の岸本大祐氏との共同研究に基づいています。

1. Polyhedral Product の定義と例

この講演では、単体複体 K とは常に有限な抽象単体複体を意味し、しばしばその幾何学的実現と同一視する。つまり、

定義 1.1. 単体複体 K とはある有限集合 $V = V(K)$ の部分集合族 $K \subset 2^V$ で次の条件を満たすものである。

- (i) $\sigma \in K$ かつ $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in K$ である。特に、 $K \neq \emptyset$ ならば $\emptyset \in K$ である。
- (ii) V の任意の元 $v \in V$ に対して $\{v\} \in K$ である。

V は頂点集合と言われ、 $V \subset [m] = \{1, 2, \dots, m\}$ をとることが多い。 $K = \Delta^V = \bar{V} = 2^V$ のとき、 K を単に simplex と言う。

この講演では、特に断らない限り空間とは基点を持つ空間を意味し、写像とは基点を持つ空間の間の基点を基点に移す連続写像を意味する。基点は空間が何であろうと単に $*$ によって表される。

定義 1.2. $V \subset [m]$ を頂点集合とする単体複体 K と空間対の集合 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ が与えられたとする。 K の単体 σ に対して

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m, \quad \text{ただし} \quad Y_i = \begin{cases} X_i & \text{for } i \in \sigma, \\ A_i & \text{for } i \notin \sigma, \end{cases}$$

と定める。 K と $(\underline{X}, \underline{A})$ に付随した Polyhedral Product $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$ とは、

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subset \prod_{i=1}^m X_i$$

と定義する。すべての i について $(X_i, A_i) = (X, A)$ のとき、 $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$ を $\mathcal{Z}_K(X, A)$ と略記する。

例 1.3.

(i) $K = \Delta^{[m]}$ のとき, Polyhedral Product は単に

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \prod_{i=1}^m X_i$$

となる.

(ii) K が $[m]$ を頂点集合とする離散複体のとき,

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) = X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_m,$$

つまり, 空間 X_i の 1 点和となる.

(iii) $K = \partial\Delta^{[m]} = \{\sigma \subset [m] \mid \sigma \neq [m]\}$ のとき,

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i \mid \text{at least one } x_i \text{ is the basepoint } *\}$$

となり, fat wedge とよばれホモトピー論でよく扱われる空間である.

(iv) $K = \partial\Delta^{[m]}$ で空間の集合 $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ に対して, $C\underline{X} = \{CX_i\}_{i=1}^m$ とおくと,

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq X_1 * \cdots * X_m \simeq \Sigma^{m-1} X_1 \wedge \cdots \wedge X_m$$

となることが Porter[1965] によって示されている. ただし, CX は空間 X の錐 $CX = X \times I / (X \times \{0\} \cup * \times I)$ を表す.

我々の研究動機は, この Porter の仕事をどこまで拡張できるか? という質問に応えることにあった. そして, ここでは専ら $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ のホモトピー型を考察する.

例 1.4.

(i) $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ と $\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}P^\infty, *)$ は toric manifolds の研究に現れる空間で, 前者を moment-angle complex, 後者を Davis-Januszkiewicz 空間とよぶ.

(ii) $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ と定義するとき,

$$\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\sigma \in K} \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0 \text{ for } \sigma = \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

となり, 部分空間配置の補空間となる. そして,

$$\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$$

であることが知られている.

2. 代数からの準備

単体複体 K から種々の代数が構成されるが, その中で最も重要なものの 1 つに Stanley-Reisner 環がある. 以下においては特に断らない限り \mathbf{k} によって乗法単位元を持つ可換環を表す. そして, それ上の次数つき多項式環 $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ を考える. ただし, $\deg v_i = 2$ とする.

定義 2.1. $[m]$ 上の単体複体 K の Stanley-Reisner ring (または face ring) とは, 剰余環

$$\mathbf{k}[K] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I_K$$

のことである. ここに, I_K は K に属しない単体 $\sigma = \{i_1, \dots, i_s\}$ に対する単項式 $v_\sigma = v_{i_1} \cdots v_{i_s}$ で生成される homogeneous ideal である.

Stanley-Reisner ring の構造を知るために, $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ と $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ が調べられてきた. ここで, torsion 加群の定義を思い出そう. M, N を R 加群とするとき M の R 自由加群分解

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

をとり, N とのテンサー積をとると鎖複体

$$\cdots \rightarrow F_i \otimes_R N \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \otimes_R N \rightarrow F_0 \otimes_R N \rightarrow 0$$

が得られ, その i 番目のホモロジー群を $\text{Tor}_i^R(M, N)$ と書く. つまり,

$$\text{Tor}_i^R(M, N) = \text{Ker}(F_i \otimes_R N \rightarrow F_{i-1} \otimes_R N) / \text{Im}(F_{i+1} \otimes_R N \rightarrow F_i \otimes_R N).$$

一般に $\text{Tor}_*^R(M, N)$ は積構造を持たないが, $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ は以下のように Koszul 分解を用いて \mathbf{k} -代数の構造を与えることが出来る.

\mathbf{k} の $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ 加群としての構造は, 各 v_i を 0 に移す写像 $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbf{k}$ を用いて与える. $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ によって \mathbf{k} 上の外積代数を表す. つまり, $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ は \mathbf{k} 上 u_1, \dots, u_m で生成されていて, 次の関係式で定義される.

$$u_i u_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ -u_j u_i & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

このとき, $R = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ は次のようにして 2 重次数つき微分代数の構造を持つ.

$$\text{bideg } u_i = (1, 2), \quad \text{bideg } v_i = (0, 2),$$

$$du_i = v_i, \quad dv_i = 0.$$

$\Lambda^i[u_1, \dots, u_m]$ によって $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ の長さ i の単項式によって生成される部分加群を表すと, 次のような完全列が得られる.

$$0 \rightarrow \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0$$

テンサー積 $\otimes_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]} \mathbf{k}[K]$ をとると鎖複体

$$0 \rightarrow \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[K] \rightarrow 0$$

を得る.

$$\text{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[K]) = \frac{\text{Ker}(\Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \Lambda^{i-1}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K])}{\text{Im}(\Lambda^{i+1}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K])}$$

より,

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}) \cong H_*(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K]; d)$$

を得るが、右辺が積構造を持つのでこれにより左辺に積構造を定義する。

以下においては、 \mathbf{k} は体であると仮定する。このとき、2つの2重次数つき加群 $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ と $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ の Poincaré 列を

$$P(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})) = \sum_{i,j \geq 0} \dim_{\mathbf{k}} \text{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})_j t^i x^j$$

$$P(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) = \sum_{i,j \geq 0} \dim_{\mathbf{k}} \text{Tor}_i^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_j t^i x^j$$

によって定義する。1950年代の後半、Serre は不等式

$$P(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \leq \frac{(1+tx)^m}{1-tP(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}))}$$

が成り立つことを証明した。ただし、不等式 \leq は対応する係数ごとにおいて不等式が成り立つことを意味する。その後、Golod は上記において等式が成り立つための必要十分条件を与えた。

定理 2.2(Golod[1962]). 等式

$$P(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) = \frac{(1+tx)^m}{1-tP(\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}))}$$

が成り立つための必要十分条件は、 $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ の積が自明であるとともに、すべての高次の Massey 積が自明であることである。

Golod に因んで、上記等式の成り立つ単体複体 K のことを Golod 複体という。さらに最近、Berglund-Jöllenbeck は次の事実を証明した。

定理 2.3(Berglund-Jöllenbeck[2007]). 単体複体 K が Golod である必要十分条件は、 $\text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ の積が自明であることである。

一方において、Buchstaber-Panov[2000], Baskakov-Buchstaber-Panov[2004], Franz[2006] らは、次の定理を証明した。

定理 2.4. \mathbf{k} を体または整数環 \mathbb{Z} とするとき、代数として同型

$$H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$$

が存在する。

従って、単体複体 K が \mathbf{k} 上 Golod であることを証明するには、コホモロジー環 $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbf{k})$ の積が自明であることを証明すればよい。特に、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ が懸垂空間であれば、すべての体 \mathbf{k} について K は Golod である。つまり、単体複体 K が Golod であるという代数的構造を調べるには、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ のホトピー型を調べればよいという事が分かる。

3. 組み合わせ論からの準備

単体複体は組み合わせ論の分野で詳しく研究されており、次のような種々の単体複体のクラスが定義されている。

定義を与えるために用語を準備する. 単体複体 K とその頂点 v に対して,

$$K \setminus v = \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma\},$$

$$\text{link}_K(v) = \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma, \sigma \cup \{v\} \in K\}$$

と定義する. $V \subset [m]$ 上の単体複体 K の極大な単体 (simplex) のことを facet と言い, $\sigma \subset [m]$ が K の missing face であるとは, σ の境界 $\partial\sigma = \{\tau \subset \sigma \mid \tau \neq \sigma\}$ は K の部分複体であるが, $\sigma \notin K$ であることを言う. 複体 K が pure であるとは, K の facet の次元がすべて等しいことを言う.

定義 3.1. 単体複体 K が shifted であるとは, K の頂点集合に次の性質をもつように全順序を与えることが出来ることを言う. 単体 σ , σ の頂点 i と $j < i$ を任意にとるとき, $(\sigma \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in K$ が成り立つことを言う. つまり, K が shifted であるための必要十分条件は, K の任意の単体について, その頂点をより小さな頂点に取り換えても K に属する単体になっているような全順序が存在することである.

定義 3.2. 単体複体 K が vertex decomposable であるとは, 次の条件を満たすことを言う.

- (i) K は simplex である, または
- (ii) 次の条件を満たす頂点 v が存在する:
 - (a) $K \setminus v$ と $\text{link}_K(v)$ はともに vertex decomposable である,
 - (b) $\text{link}_K(v)$ の面は $K \setminus v$ の真の面である.

定義 3.3. 単体複体 K が shellable であるとは, K の facet $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ を次の条件を満たすように順序づけられることを言う: すべての $2 \leq i \leq k$ について

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_j}\right) \cap \overline{\sigma_i}$$

が pure な $\dim \sigma_i - 1$ 次元複体である. このとき, 順序 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ を shedding order と呼ぶ. そして,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_j}\right) \cap \overline{\sigma_i} = \partial\overline{\sigma_i}$$

となる facet σ_i を (与えられた shedding order に関する) spanning facet という.

空間 X は $\tilde{H}_i(X; \mathbf{k}) = 0$ for $i \leq n$ を満たすとき, \mathbf{k} 上 n -acyclic という. $n = \infty$ のとき, 単に \mathbf{k} 上 acyclic という. 単体複体 K と整数 n に対して, $K^{(n)}$ によって, K の n 次元以上の単体で生成される K の部分複体を表す.

定義 3.4. 単体複体 K について考える.

- (i) すべての n について, $K^{(n)}$ が \mathbf{k} 上 $n-1$ -acyclic のとき, K を \mathbf{k} 上 sequentially acyclic であるという.
- (ii) K のすべての単体 σ について, $\text{link}_K(\sigma)$ が \mathbf{k} 上 sequentially acyclic であるとき, K を \mathbf{k} 上 sequentially Cohen-Macaulay であるという. 特に K 自身 \mathbf{k} 上 sequentially acyclic である.

そして, これらの間に次の関係がある.

$$\text{shifted} \implies \text{vertex decomposable} \implies \text{shellable} \implies \text{sequentially Cohen-Macaulay over } \mathbb{Z}$$

ここで重要な定理を述べる前に、もう1つ定義が必要になる。

定義 3.5. $V \subset [m]$ 上の単体複体 K の Alexander dual K^* とは、次によって定義される単体複体を表す。

$$K^* = \{\sigma \in [m] \mid \sigma^c = [m] \setminus \sigma \notin K\}$$

従って、 $\sigma \subset [m]$ について次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sigma \text{ is a facet of } K &\iff \sigma \in K \text{ and if } \sigma \subsetneq \tau \text{ then } \tau \notin K \\ &\iff \sigma^c \notin K^* \text{ and if } \tau \subsetneq \sigma^c \text{ then } \tau \in K^* \\ &\iff \sigma^c \text{ is a missing face of } K^* \end{aligned}$$

$(K^*)^* = K$ であることを考えると、単体複体 K を記述するのにその facet を指定するのと missing face を指定するのが同値であることが分かる。

定理 3.6(Herzog-Reiner-Welker[1999]). K を $[m]$ 上の単体複体とする。もし、 K の Alexander dual K^* が体 \mathbf{k} 上 sequentially Cohen-Macaulay ならば、 K は体 \mathbf{k} 上 Golod である。

次章で述べるように、我々はこの定理を $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ のホモトピー型を研究することにより、証明することに成功した。

4. 主定理とその証明のアイデア

もう1度、我々が考察する特別な polyhedral product の定義を思い出そう。 $V \subset [m]$ を頂点集合とする単体複体 K と空間の集合 $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ が与えられたとする。 K の単体 σ に対して

$$(C\underline{X}, \underline{X})^\sigma = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m, \quad \text{ただし } Y_i = \begin{cases} CX_i & \text{for } i \in \sigma, \\ X_i & \text{for } i \notin \sigma, \end{cases}$$

と定める。 K と $(C\underline{X}, \underline{X})$ に付随した Polyhedral Product $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ とは、

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) = \bigcup_{\sigma \in K} (C\underline{X}, \underline{X})^\sigma \subset \prod_{i=1}^m CX_i$$

と定義する。特に、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1) = \mathcal{Z}_K(CS^1, S^1)$ である。

また、 $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset [m]$ に対して、 $\hat{X}^I = X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_k}$ および $\underline{X}_I = \{X_{i_j}\}_{j=1}^k$ と定義する。さらに、 $V \subset [m]$ 上の単体複体 K に対して、

$$K_I = \{\sigma \subset I \mid \sigma \in K\}$$

と定義する。特に、 $I \subset [m]$ が K の simplex ならば $K_I = \Delta^I$ となり可縮である。また、以下の定理では $\hat{X}^\emptyset = *$ と約束する。

このとき、次が我々の主定理である。

定理 4.1. K を $[m]$ 上の単体複体で $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ は連結な CW 複体の集合とする。 K の Alexander dual が shellable ならば

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である。

定理 4.2. K を $[m]$ 上の単体複体で $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ は連結な CW 複体の集合とする. K の Alexander dual が体 \mathbf{k} 上 sequentially Cohen-Macaulay ならば

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq_{(p)} \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である. ただし, p は体 \mathbf{k} の標数である.

系 4.3. K を $[m]$ 上の単体複体で $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ は連結な有限複体の集合とする. K の Alexander dual が任意の体 \mathbf{k} 上 sequentially Cohen-Macaulay ならば, 次のホモトピー同値が存在する.

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

系 4.4. K は系 4.3 の通りとすると $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ は球面の 1 点和にホモトピー同値である.

少し歴史を. まず最初に Grbić-Theriault[2004] が K が shifted の場合に moment-angle complex $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ が球面の 1 点和にホモトピー同値であることを示した. その後, Grbić-Theriault と我々は 2013 年にこれを一般の $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ の分解に拡張した (我々の論文では各 X_i は必ずしも連結でない). ここで, K が shifted であることと, その Alexander dual K^* が shifted であることは同値であることを注意しておく. さらに, 2012 年に Grujić-Welker が K の Alexander dual が vertex decomposable の場合に, $\mathcal{Z}_K(D^{n+1}, S^n)$ が球面の 1 点和にホモトピー同値であることを示した. ところが彼らの証明をよく見ると, K の Alexander dual が vertex decomposable の場合に, $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ が系 4.2 と同じ形の分解を持つことが分かる. もちろん, 各 X_i が連結であることを仮定する必要もない. 従って, 次に挑戦すべき課題として, K の Alexander dual が shellable である場合や sequentially Cohen-Macaulay である場合に $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ の wedge decomposition を与えることが浮上するのは自然なことである. 我々は各 X_i が連結であるという条件を余分に付け加えることによって, 当初の目的を達成することが出来た. 当面の今後の課題は, 各 X_i が連結でない場合を研究すること, 特に real-moment angle complex $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$ が分解するかどうかを決定することである.

定理 4.2, 4.3 の証明には技術的な道具が必要だが, 基本的な証明のアイデアは同じなので, そのようなものを必要としない定理 4.1 の証明を紹介する. まず, 新しい単体複体のクラスを導入する.

定義 4.5. 単体複体 K が \mathbf{k} 上 extractible であるとは,

- (i) ある頂点 v について $K \setminus v$ が simplex になるか,
- (ii) K のすべての頂点 v について $K \setminus v$ が \mathbf{k} 上 extractible であり, 写像

$$\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v)$$

で合成写像

$$\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \rightarrow \Sigma K$$

が \mathbf{k} 係数のホモロジー群の恒等写像を導くものが存在することである. ただし, 上記の右側の写像は包含写像 $K \setminus v \rightarrow K$ から誘導されたものである.

\mathbb{Z} 上 extractible であるとき, 単に extractible であるという. この新しいクラスを用いると, 定理 4.1 は次の 2 つの定理の系として導かれる.

定理 4.6. K を $[m]$ 上の単体複体で $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ は連結な CW 複体の集合とする. K が extractible ならば

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である.

定理 4.7. K を $V \subset [m]$ 上の単体複体で, K の Alexander dual K^* が $[m]$ 上の複体であるとする. K が shellable ならば, K^* は extractible である.

定理 4.6 の証明のスケッチ. まず, $K \setminus v$ が simplex となるような頂点がある場合は, 証明が簡単なのでここでは省略する.

そうでない場合を以下では考える. 与えられた条件のもとでは,

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}), \quad \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

の両空間とも単連結であることが容易に示されるので, m に関する帰納法を用いて, 写像

$$\bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

でホモロジー群の間の同型写像を誘導するものを構成する. このとき, J.H.C. Whitehead の定理より上記写像はホモトピー同値な写像となり証明が終わる. そこで, 各 $I \subset [m]$ に対して写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

で, それが誘導するホモロジー群の間の準同型写像が標準的なものとなるものを構成する. ここで「標準的」とは何か.

よく知られたホモトピー同値写像

$$\Sigma(X_1 \times \cdots \times X_m) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma \hat{X}^I$$

の一般化として, polyhedral product $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$ も 1 回懸垂すると, より小さな空間の懸垂空間の 1 点和にホモトピー同値になることが知られている.

定理 4.8(Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler[2010]). K を $V \subset [m]$ 上の単体複体で $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ は連結な CW 複体の集合とする. このとき, 自然なホモトピー同値写像

$$\Sigma \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \xrightarrow{\cong} \Sigma \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が存在する.

このとき, 写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であるとは, 定理 4.8 で構成された写像が誘導するホモロジー群の間の準同型写像と一致することを言う.

定理の証明に戻ろう。帰納法を使うと各 $I \subsetneq [m]$ に対して、合成写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}_I, \underline{X}_I) \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が求めるものであることが定理 4.8 の写像の自然性より結論できるので、最終的に

$$K \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_m \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

で、それが誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であるものを構成すればよい。そのために、単体複体の包含写像 $K \setminus v \rightarrow K$ が誘導する polyhedral product の間の写像

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を利用する。つまり、左側の項の $\rtimes X_v$ と右側の項の CX_v を 1 点に潰すと写像

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})/CX_v \simeq \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を得る。ここに、 $Y \rtimes X = (Y \times X)/(* \times X)$ である。帰納法の仮定より、 $\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v})$ は懸垂空間より、次のホモトピー同値写像が存在する。

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \simeq \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \vee (\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v)$$

従って、写像

$$\alpha_v : \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v \rightarrow \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})/CX_v \simeq \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が構成できた。さらに帰納的に構成された

$$f_v : \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m] \setminus v} \wedge X_v \rightarrow \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v$$

と、 K が extractible であることの定義より、写像

$$g : \Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v)$$

で合成写像 $\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \rightarrow \Sigma K$ がホモロジー群の恒等写像を誘導するような写像を用いて、合成写像

$$\Sigma K \wedge \hat{X}^{[m]} \xrightarrow{g \wedge 1} \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m]} = \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m] \setminus v} \wedge X_v \xrightarrow{\vee f_v} \bigvee_{v \in [m]} \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v \xrightarrow{\vee \alpha_v} \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を構成する。最後にこの写像が誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であることを、定理 4.8 において構成された写像の自然性を用いて証明すれば、証明は完成する。□

定理 4.7 の証明. m に関する帰納法により証明する。 $m = 1$ のとき、定理は明らかに成り立つ。

$m \geq 2$ で定理は $m - 1$ のとき正しいと仮定して、 m のときも成り立つことを証明する。

$K^* \setminus v = \text{link}_K(v)^*$ と $\text{link}_K(v)$ が shellable であることより、帰納法の仮定より $K^* \setminus v$ も extractible である。 $\emptyset^* = \Delta^{[m]}$ と $\{0\}^* = \partial \Delta^{[m]}$ が成り立ち、これらの複体は extractible だから K が頂点を持つ場合の証明を行う。

Björner-Wachs[1996] により、shellable な複体のホモトピー型はよく分かっている。 K の shelling を 1 つ固定し、 Γ_K を K の spanning facets の集合、 $\Delta_K = K \setminus \Gamma_K$ とおく。このとき、 Δ_K は collapsible だから

$$K \simeq K/\Delta_K = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma}$$

を得る. Γ_K の facet は Δ_K の missing face より,

$$\Delta_K^* = (\Delta_K)^* = K^* \cup \bigcup_{\sigma \in \Gamma_K} \sigma^c$$

を得る. ここに, $\sigma^c = [m] \setminus \sigma$ である.

簡単に Δ_K^* が可縮なことが分かるから, 次のホモトピー同値写像が存在する.

$$\Sigma K^* \simeq \Delta_K^*/K^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma^c}.$$

Björner-Wachs[1997] により, K が shellable ならば $\text{link}_K(v)$ も shellable であることが分かっている, K の shelling order を上手くにとって $\text{link}_K(v)$ の shelling order で次の条件を満たすものが存在することが分かる.

$$\Gamma_{\text{link}_K(v)} = \{\sigma \setminus v \mid \sigma \in \Gamma_K \text{ and } v \in \sigma\}.$$

そこで次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{link}_K(v)} = \text{link}_K(v) \setminus \Gamma_{\text{link}_K(v)} & \xrightarrow{c} & \text{link}_K(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_K = K \setminus \Gamma_K & \xrightarrow{c} & K. \end{array}$$

$K^* \setminus v = \text{link}_K(v)^*$ より, 次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{link}_K(v)^* & \xrightarrow{c} & \Delta_{\text{link}_K(v)}^* & \longrightarrow & \Delta_{\text{link}_K(v)}^*/\text{link}_K(v)^* & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma(K^* \setminus v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^* & \xrightarrow{c} & \Delta_K^* & \longrightarrow & \Delta_K^*/K^* & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma K^*. \end{array}$$

ただし, $\text{link}_K(v)^*$ と $\Delta_{\text{link}_K(v)}^*$ は $\Delta^{[m] \setminus v}$ の部分複体として Alexander dual を考えているが, K^* と Δ_K^* は $\Delta^{[m]}$ の部分複体として Alexander dual を考えていることを注意する.

次のホモトピー同値写像

$$\Sigma \text{link}_K(v)^* \simeq \Delta_{\text{link}_K(v)}^*/\text{link}_K(v)^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_{\text{link}_K(v)}} S^{\dim(([m] \setminus v) \setminus \sigma)} = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K, v \in \sigma} S^{\dim \sigma^c}$$

が存在するので, $\Sigma K^* \simeq \Delta_K^*/K^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma^c}$ の $S^{\dim \sigma^c}$ は σ から任意の頂点 v をとると $\Sigma(K^* \setminus v) \simeq \Sigma \text{link}_K(v)^*$ wedge 因子から来ていることが分かる. 以上より, 所定の性質を持つ写像 $\Sigma K^* \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K^* \setminus v)$ を構成することは易しいことである. \square

参考文献

1. Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov, Toric topology, available at arXiv:1210.2368
2. Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto, Topology of polyhedral products and the Golod property of Stanley-Reisner rings, available at arXiv:1304.4722