

# 3次元双曲多様体の最小体積問題について

吉田 建一 (東京大学数理科学研究科博士2年)

## 概要

特定の性質をもつ3次元双曲多様体のうち体積が最小のものを決定する問題について解説し、向き付け可能でカスプを4つもつ場合の講演者による結果を述べる。

## 1 導入

双曲多様体とは、断面曲率が至るところで  $-1$  であるような完備 Riemann 多様体のことである。この予稿では有限体積3次元双曲多様体を考える。有限体積3次元双曲多様体は閉多様体であるか、境界がトーラスまたはクラインボトルからなるコンパクトな多様体の内部と同相である。以下で3次元双曲多様体といったときはこのコンパクトな多様体を指すことにする。境界の成分をカスプと呼ぶ。

有限体積3次元双曲多様体の双曲計量は一意的であることが Mostow 剛性として知られている。これにより、有限体積3次元双曲多様体の分類は位相の分類である。とくに体積が位相不変量となる。

3次元双曲多様体には双曲的 Dehn 手術という操作がある。3次元双曲多様体のトーラスカスプへのソリッドトーラスの貼り合わせ方は無限通りあるが、有限個の場合を除いてえられた多様体にも双曲計量が入る。双曲的 Dehn 手術によってえられた双曲多様体の体積は元の双曲多様体の体積よりも小さくなることが知られている。さらに以下の定理により、3次元双曲多様体の体積のなす分布は非常に特徴的である。

**定理 1.1** (Jørgensen-Thurston theorem). 有限体積3次元双曲多様体の体積のなす集合は  $\mathbb{R}$  の順序によって  $\omega^\omega$  の型の整列集合となる。ここでトーラスカスプを  $n$  個もつ双曲多様体の体積は  $n$  重極限数と対応し、双曲的 Dehn 手術によってえられる無限個の双曲多様体の体積が元の双曲多様体の体積に下から集積する。また、体積が同じ有限体積3次元双曲多様体は有限個である。

ちなみに、2次元または4次元以上の双曲多様体の体積の分布はそれぞれ離散的である。

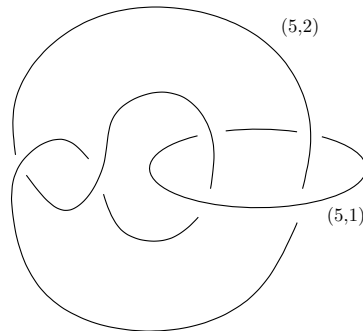


図1 Weeks 多様体の図式

これにより, 有限体積 3 次元双曲多様体からなる空でない集合には体積が最小のものが存在する. これは一意的ではないが有限個である. 素朴な問題として, 向き付け可能でカスプを  $n$  個もつ 3 次元双曲多様体のうち最小体積のものは何かということを考えたい. 双曲的 Dehn 手術により, この最小体積は  $n$  に関して単調増加であることに注意する.

これまでわかっていた結果は  $n = 0, 1, 2$  の場合である.

**定理 1.2.**     • カスプ 0 個 (つまり閉多様体) の場合.

Gabai-Meyerhoff-Milley [9] により, Weeks 多様体と呼ばれる, Whitehead 絡み目を (5,1)-(5,2)-Dehn 手術したもの (図 1) が最小体積で, その体積は  $0.94\dots$  である.

• カスプ 1 つの場合.

Cao-Meyerhoff [7] により, 8 の字結び目の補空間と Whitehead 絡み目を (5,1)-Dehn 手術したもの (図 2) が最小体積で, その体積は  $2V_3 = 2.02\dots$  である. ここで  $V_3$  は理想正四面体 (頂点が無限遠にある  $\mathbb{H}^3$  の正四面体) の体積を表す.

• カスプ 2 つの場合.

Agol [3] により, Whitehead 絡み目と  $(-2, 3, 8)$  プレッツェル絡み目の補空間 (図 3) が最小体積で, その体積は  $V_8 = 3.66\dots$  である. ここで  $V_8 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$  は理想正八面体 (頂点が無限遠にある  $\mathbb{H}^3$  の正八面体) の体積を表す.

さらに Agol [3] により  $n \geq 3$  の場合の最小体積が予想されている.

**予想 1.3.**     •  $3 \leq n \leq 10$  の場合.

ねじれが最小の双曲的チェーン絡み目 (図 4) の補空間は最小体積をもつ.

•  $n \geq 11$  の場合.

Whitehead 絡み目の補空間の  $(n - 1)$  重被覆 (図 5) は最小体積をもつ.

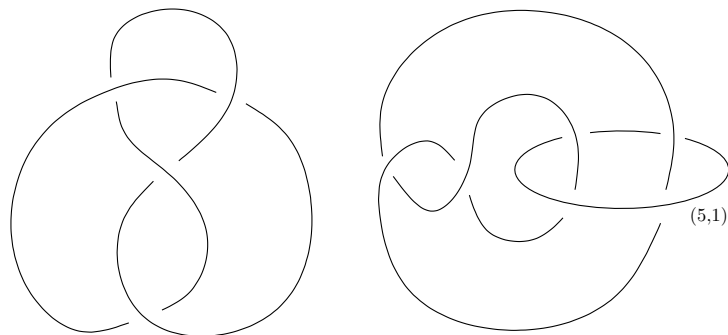


図2 8の字結び目の補空間と Whitehead 絡み目を (5,1)-Dehn 手術したもの

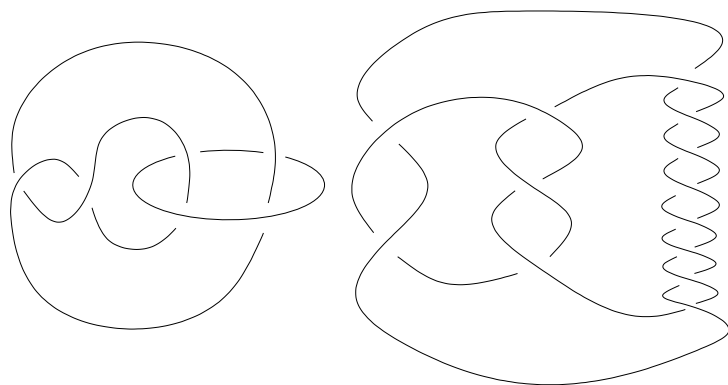


図3 Whitehead 絡み目と (-2, 3, 8) プレッツェル絡み目

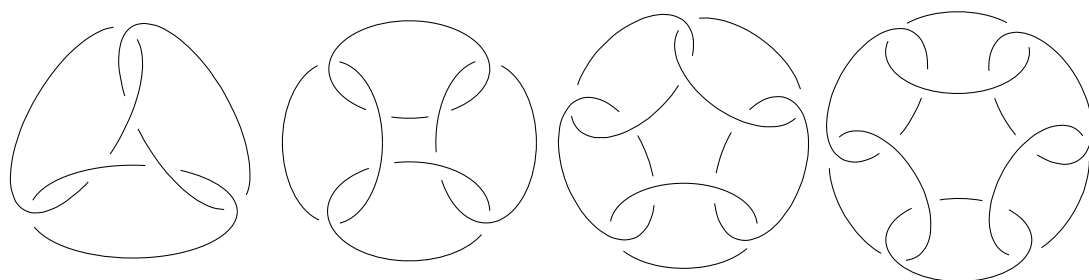


図4 ねじれが最小の双曲的チェーン絡み目 ( $3 \leq n \leq 6$ )

講演者は Agol [3] の方法を応用することにより,  $n = 4$  の場合についてこの予想を解決した.

**定理 1.4.** (Y. [11]) カスプを4つもつ向き付け可能な3次元双曲多様体のうち体積が最小のものは, ねじれが最小の4成分双曲的チェーン絡み目 (Rolfsen の表で  $8_2^4$ ) の補空間である.

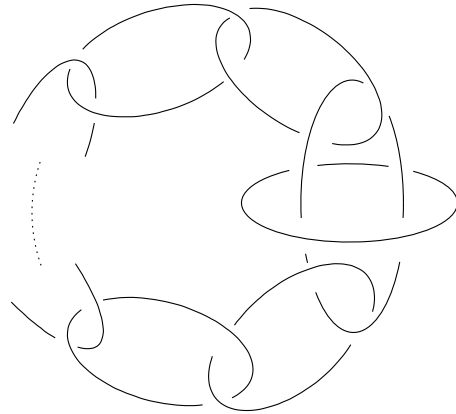


図5 Whitehead 絡み目の補空間の被覆

## 2 sphere packing による体積の評価

最小体積の3次元双曲多様体を決定するためには、体積を下から評価する必要がある。そのための方法の1つが sphere packing である。定曲率空間に球を詰めこんだときの球が占める“体積の割合”が Böröczky [5] によって考察されている。 $\mathbb{H}^3$  内のホロ球の場合は、理想四面体の内部においてその頂点を中心とする互いに接するホロ球が占める割合  $(\frac{\sqrt{3}}{2})/V_3$  が最大である。

カスプをもつ3次元双曲多様体に対してホロ球を割って得られるカスプの近傍のうち最大のものを考える。そのカスプ近傍が多様体全体で占める体積の割合を考えることにより、Adams はカスプを  $n$  個もつ (向き付け可能でなくてもよい)3次元双曲多様体の体積が  $nV_3$  以上であることを示した ([2])。とくに、カスプ1つの場合は理想正四面体1つの面を貼り合わせてえられる向き付け不可能な双曲多様体 (Gieseking 多様体) の体積が最小である ([1])。

向き付け可能でカスプをもつ場合 (定理 1.2 の  $n = 1$ ) も同様の方法を使うが、向き付け可能性を使うので議論は複雑になる。結果としては理想正四面体2つの面を貼り合わせてえられる向き付け可能な双曲多様体の体積が最小である。

上記の場合ではカスプを手がかりにして体積を評価できるわけだが、閉双曲多様体の場合 (定理 1.2 の  $n = 0$ ) でも、双曲的 Dehn 手術の逆として閉測地線を除いてえられるカスプ付き双曲多様体の組み合わせ構造が利用される。

### 3 カスプ 2 つの場合の体積の評価

Agol [3] によるカスプ 2 つの場合の体積の評価についての概要を述べる. 証明には Miyamoto [10] による全測地的境界をもつ双曲多様体の体積の評価を利用する. 全測地的境界をもつ双曲多様体のカスプにはトーラス成分と, 全測地的境界に隣り合うアニュラス成分がありうることに注意する. 体積の評価にはまず境界への複数の同じ長さの垂線がある点の集合で双曲多様体を切り離す. つまり境界のどの部分に近いかで分割する. ここでえられた成分の体積を sphere packing に類似した方法で評価できる. 結果として境界の Euler 数によって体積を下から評価できる.

**定理 3.1.** (Miyamoto [10, Theorem 5.2])  $L$  を全測地的境界をもつ 3 次元双曲多様体とする. このとき

$$\text{vol}(L) \geq \frac{V_8}{2} |\chi(\partial L)|.$$

等号が成立するとき  $M$  は理想正八面体の面を貼り合わせてえられる.

$M$  を (全測地的境界をもたない) 3 次元双曲多様体とする.  $M$  内の本質的曲面  $X$  で  $M$  を切り離したものを  $M \setminus X$  とかく. ( $X$  の連結性は仮定しない.)  $M \setminus X$  をさらに JSJ 分解すると,  $M \setminus X$  はいくつかのアニュラスによって分解され, えられた成分は以下の 4 つのタイプのうちの 1 つとなる.

1.  $T^2 \times I$ , 境界の片方は  $M \setminus X$  のカスプのトーラス成分である. (ここで  $I$  は閉区間.)
2.  $S^1 \times D^2$ , カスプあるいは  $X$  からできた境界といくつかのアニュラスで交わる.
3. Euler 数が負であるような  $I$  束, 境界上の  $I$  束は分解するアニュラスまたは  $M \setminus X$  のカスプのアニュラス成分からなる.
4. “guts” と呼ばれる全測地的境界をもつ双曲構造が入る部分. これを  $\text{Guts}(M \setminus X)$  とかく.  $X$  からできる部分が全測地的境界となり, 分解するアニュラスまたは  $M \setminus X$  のカスプからできる部分がカスプとなる.

このうちの guts に全測地的境界をもつ双曲構造をいれたものの体積で元の  $M$  の体積を下から評価できる.

**定理 3.2.** (Agol-Storm-Thurston [4, Theorem 9.1])  $M$  を 3 次元双曲多様体,  $X \subset M$

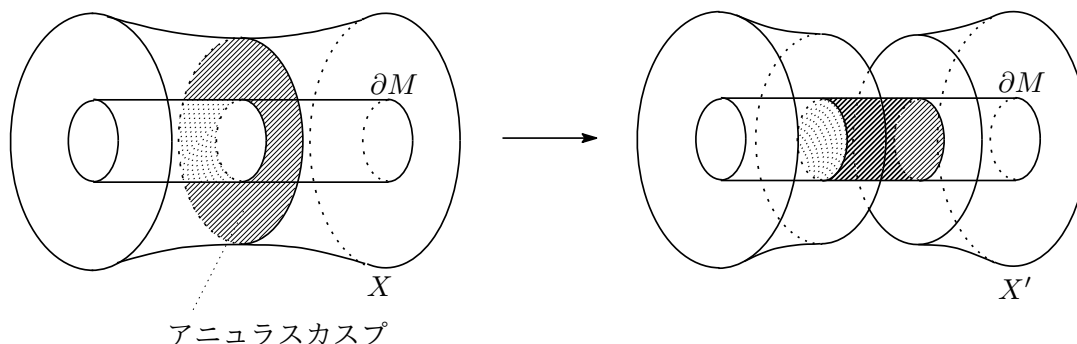


図6 アニュラス圧縮

を本質的曲面とする. このとき

$$\text{vol}(M) \geq \text{vol}(\text{Guts}(M \setminus X)) \geq \frac{V_8}{2} |\chi(\partial \text{Guts}(M \setminus X))|.$$

右側の不等式は定理 3.1 による.

さらに Calegari-Freedman-Walker [6] の精密化により, 等号が成立するとき  $M$  は理想正八面体の面を貼り合わせてえられる.

定理 3.2 により, カスプを 2 つもつ 3 次元双曲多様体  $M$  に対し  $\text{Guts}(M \setminus X)$  が空でないような本質的曲面  $X \subset M$  が存在することを示せばよいことがわかる. そのような本質的曲面の構成の出発点として,  $M$  の 1 つのカスプとだけ交わる本質的曲面をとる. その存在は以下の定理からわかる.

**定理 3.3.** (Culler-Shalen [8])  $M$  をカスプを  $n$  個もつ向き付け可能な 3 次元双曲多様体とする. このとき  $1 \leq k \leq n$  に対して  $M$  の  $k$  個のカスプとだけ交わる本質的曲面が存在する.

定理 3.3 の証明には character variety を使い, 向き付け可能性が必要である.

さらにアニュラス圧縮という操作を本質的曲面に対して行う.

**定義 3.4** (アニュラス圧縮). 本質的曲面  $X$  と  $M$  のカスプの間に本質的アニュラスがとれたとき, 図 6 のような操作をアニュラス圧縮とよぶ.

アニュラス圧縮を行うと, 本質的アニュラスがあった部分は JSJ 分解後の  $I$  束成分にならない. また,  $T^2 \times I$  または  $S^1 \times D^2$  の成分が  $M$  のカスプの周りにはアニュラス圧縮が可能である. これらのことから, 最大限アニュラス圧縮をすると guts が空になら

ない本質的曲面がえられることがわかる.

## 4 カスプ4つの場合の体積の評価

講演者によるカスプ4つの場合の体積の評価についての概要を述べる. 理想正八面体2つの面を貼り合わせてえられるカスプを4つもつ向き付け可能な双曲多様体は定理1.4のものだけなので, 定理3.2により guts の境界の Euler 数が  $-4$  以下であるような本質的曲面が存在することを示せばよい.

$M$  をカスプ  $T_0, \dots, T_3$  をもつ向き付け可能な3次元双曲多様体とする. 出発点としてはカスプ2つの場合と同じく  $T_0$  とだけ交わる本質的曲面  $X_0$  をとる. アニュラス圧縮を最大限行うことにより, guts が  $T_1, \dots, T_3$  と交わるような本質的曲面  $X_1$  がえられる. さらに,  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  を含む  $M \setminus X_1$  の成分が JSJ 分解において1つ以上のアニュラスで分解されるならば,  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  には4つ目のカスプがある. そのようなアニュラスが存在しないならば  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  と交わる  $X_1$  の成分をとり, 必要ならさらにアニュラス圧縮することによって  $\text{Guts}(M \setminus X)$  がカスプを4つもつような本質的曲面  $X$  をえる.

これにより全測地的境界とカスプを4つ以上もつ向き付け可能な3次元双曲多様体  $L$  の体積の評価に帰着することができる.  $\chi(\partial L) \leq -4$  なら定理3.1により既に  $\text{vol}(L) \geq 2V_8$  だから,  $\chi(\partial L) = -2$  としてよい. つまり,  $\partial L$  は種数2の閉曲面といくつかのトーラスカスプからなる.  $L$  のダブルとなる双曲多様体を考えることにより, 定理3.2は  $L$  に対しても成り立つことがわかる. よって  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y)) \leq -4$  となるような, 全測地的境界と交わらない本質的曲面  $Y \subset L$  が存在することを示せばよい.  $X$  とこの  $Y$  を組み合わせることにより求める  $M$  の本質的曲面をえる.

まず本質的曲面  $Y_0 \subset L$  で,  $\partial Y_0$  がカスプに含まれ  $\partial Y_0$  が代表する  $H_1(\partial L; \mathbb{Z})$  のホモロジー類が0にならないものをとる. このような  $Y_0$  が存在することは  $\chi(\partial L) = -2$  であることとカスプが4つ以上あることから純粋にホモロジーだけの議論でわかる.

$\text{Guts}(L \setminus Y_0)$  が  $L$  の全測地的境界とどのくらい交わるかを考える.  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L)$  は  $0, -1, -2$  のいずれかである.  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -2$  の場合,  $\partial L$  以外にも  $\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)$  に含まれる部分があるので  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)) \leq -4$  がわかる.

$\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = 0$  の場合,  $L$  の全測地的境界は  $I$  束と交わっている. この  $I$  束の境界の片方は  $\partial L$  に含まれていて, もう片方は  $Y_0$  に含まれている.  $Y_0$  として最も単純なもの (Euler 数の絶対値が小さいもの) をとっておくと, 2つの  $I$  束が  $L$  の全測地的境界と交わっていることになる. その2つのうち片方の  $I$  束と  $Y_0$  の交わりをもう片方の  $I$  束

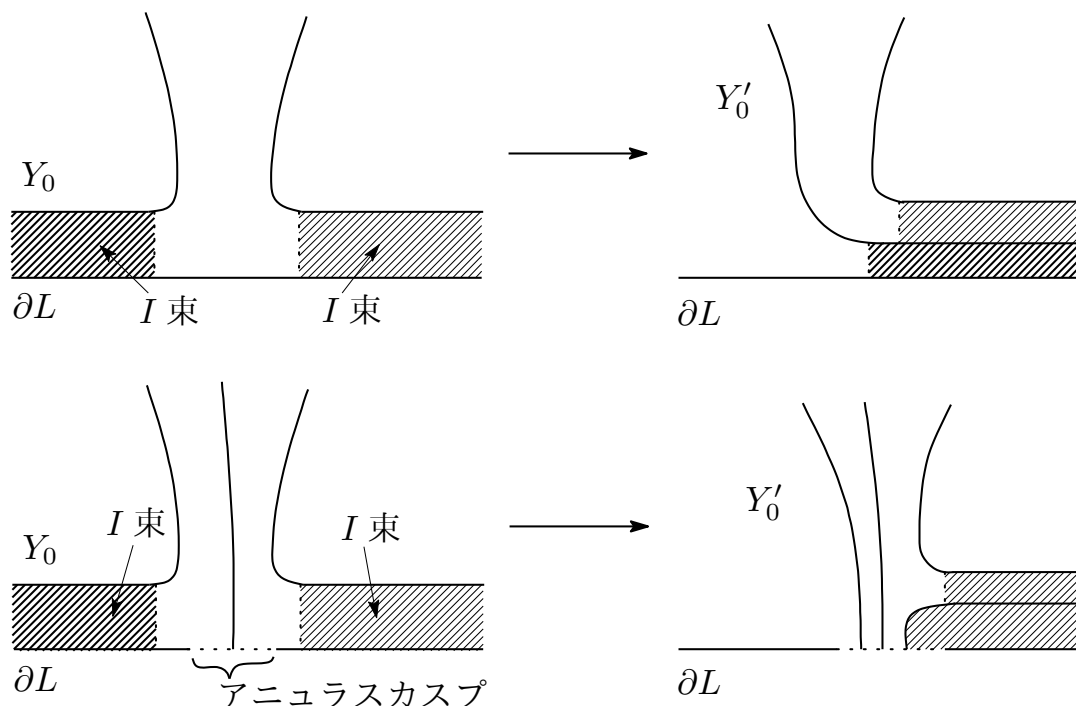


図7  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = 0$  の場合の曲面の構成

の内部に移すような形で新しい本質的曲面を作る (図 7). この操作は曲面の代表するホモロジーを変えないので, 新しい曲面が本質的にならずに消えてしまうことはない. この操作を最大限くりかえすと,  $L$  の全測地的境界の半分と交わる guts が現れる. これにより  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  の場合に帰着される.

$\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  で  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)) = -2$  の場合,  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap Y_0) = -1$  である. この部分を  $L$  の全測地的境界に交わっている  $I$  束の内部に移すような形で新しい本質的曲面を作る (図 8). この操作は曲面の代表するホモロジーは変えうるが曲面の境界のホモロジーは変えないので, やはり新しい曲面も本質的である. この操作を最大限くりかえすと,  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y)) \leq -4$  となる本質的曲面  $Y$  がえられる.

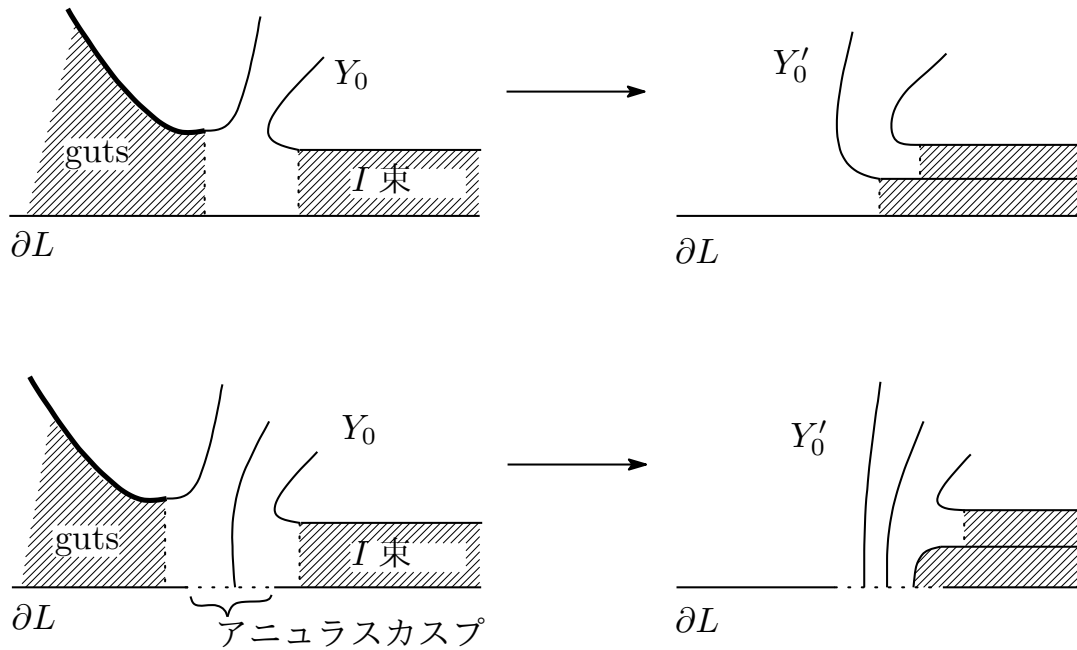


図8  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  の場合の曲面の構成

## 参考文献

- [1] C. Adams, The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 4, 601-606.
- [2] C. Adams, Volumes of N-cusped hyperbolic 3-manifolds, J. London Math. Soc. **38** (1988), no. 2, 555-565.
- [3] I. Agol, The minimal volume orientable hyperbolic 2-cusped 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 10, 3723-3732.
- [4] I. Agol, P. Storm and W. Thurston, Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 4, 1053-1077.
- [5] K. Böröczky, Packings of spheres in spaces of constant curvature, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), no. 3, 243-261.
- [6] D. Calegari, M. Freedman and K. Walker, Positivity of the universal pairing in 3 dimensions, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 1, 107-188.
- [7] C. Cao and R. Meyerhoff, The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimum volume, Invent. Math. **146** (2001), no. 3, 451-478.

- [8] M. Culler and P. Shalen, Bounded, separating, incompressible surfaces in knot manifolds, *Invent. Math.* **75** (1984), no. 3, 537-545.
- [9] D. Gabai, R. Meyerhoff and P. Milley, Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), no. 4, 1157-1215.
- [10] Y. Miyamoto, Volumes of hyperbolic manifolds with geodesic boundary, *Topology* **33** (1994), no. 4, 613-629.
- [11] K. Yoshida, The minimal volume orientable hyperbolic 3-manifold with 4 cusps, arXiv:1209.1374 (2012), to appear in *Pacific J. Math.*