Bearded Trees の言語と A_∞ 構造の単位元

岩 瀬　則 夫

（九州大学　大学院 数理学研究院）

1 A_∞ 構造

1.1 A_∞ 構造と単位元

A_∞ 構造は群構造のホモトピー的な変形として 1963 年に Stasheff [St:63] により導入されたが、1957 年には Sugawara [Su1:57, Su2:57] が（逆元を持つ）hopf 空間とホモトピー結合的 hopf 空間に対する準ファイバー空間を用いた特徴づけを行っている。

準ファイバー空間列

$$\begin{tikzcd}
E^1X \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_0^X"'] & E^{i+1}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_i^X"] & E^mX \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_{m-1}^X"'] & D^mX \arrow[d, "p_m^X"] \\
P^0X \arrow[r, hook] & P^iX \arrow[r, hook] & P^{m-1}X \arrow[r, hook, "\iota_i"] & P^mX
\end{tikzcd}$$

実際、Stasheff [St:63] では Sugawara の特徴づけを一般化した A_∞ 構造の二つの定義 — 準ファイバー空間列と A_∞ 形式 — を与え、それらの同値性を示した。その鍵は A_∞ 形式を用いた準ファイバー空間列の構成で、厳密な単位元（strict unit）の存在を用いる。

A_m 形式

$a(n) : K(n) \times (\prod^n X) \longrightarrow X,\ \ 2 \le n \le m,$　（必要なら $a(1) = 1_X$ と置く）

boundaries

$$a(n)(\partial_k(\rho,\sigma);\mathbf{x}) = a(r)(\rho; a_k(s)(\sigma;\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$\text{where } a_k(s)(\sigma;\mathbf{x}) = (x_1, \cdots, x_{k-1}, a_s(\sigma; x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots, x_n),$$

strict unit

$$a(n)(\tau; x_1, \cdots, x_{j-1}, e, x_{j+1}, \cdots, x_n) = a(n-1)(d_j^K(\tau); x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n).$$

さて Stasheff は strict unit についての込み入った条件を [St:63] で導入したが、1970 年の Lecture Note [St:70] では単なる積の単位元（hopf unit）の条件にまで弱めていた。

$$\boxed{\text{hopf unit: } a(2)(*;x,e) = x = a(2)(*;e,x)} \ \fallingdotseq\ \boxed{\text{h-unit: } a(2)(*;x,e) \sim x \sim a(2)(*;e,x)}$$

しかし、1978 年の無限ループ空間の本 [Ad:78] の中で Adams は、積を与える写像がホモトピー逆元を持つならば連結性は必要ない（[St:63] は連結性を暗黙に仮定する）こと、及び本文には記述しないが (strict) unit についての込み入った条件が必要であることを指摘した。実際、A_∞ 形式から準ファイバー空間を構成する [St:63] の証明には ホモトピー逆元 の存在が必要であり、連結 CW 複体はこれを満たす。また、二つの単位元の条件に対して [St:63] に与えられた同値性の証明には、James の retractile の議論 が用いられているが、これは A_m 形式の deformation を与えるのではなく、新しい A_m 形式を与える一種の存在定理である。従って、この議論を用いて A_∞ 構造の例えば A_3 形式を取り換えた場合、新しい A_3 形式に対しても A_∞ 構造の存在を保証しうるのか不明である。そこで筆者は幾人かの専門家にも相談し、全く異なる道を探ることとした。

1.2 ホモトピー単位元

ホモトピー単位元の考察は、Boardmann らによる trivalent trees を用いた議論 [B:71, BV:73] にまで遡るが、位相的な operad としての構成には、Muro-Tonks の最近の結果 [MT:12] が詳しい。それによれば、彼らの unital Associahedra の boundary と homotopy unit は Fukaya–Oh–Ohta–Ono [FOOO1:09, FOOO2:09] の unital DG algebra の構造に対応するという。しかしその homotopy unit は strict unit のホモトピー版であり、単なる積のホモトピー単位元（h-unit）（[St:70] の hopf unit とほぼ同等）よりずっと強い。本講演では、hopf unit の存在から strict unit の存在を導く次の結果を紹介したい。

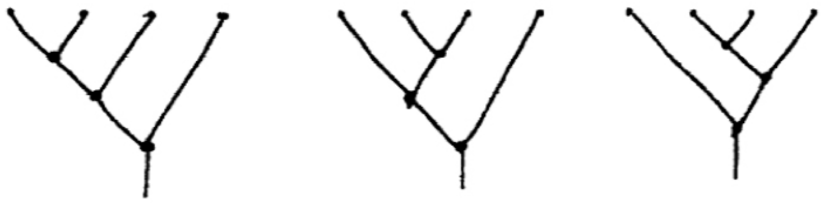
定理 1.1 ([I:12]) *If there is an A_m form $\{M_n, n{\leq}m\}$ with hopf-unit on X with (X, M_2) a CW loop-like Hopf space, then there is an A_m form $\{\widetilde{M}_n, n{\leq}m\}$ with strict-unit on X.*

ここで hopf 空間が loop-like とは、左右のホモトピー逆元が存在することであり、従って $m \geq 3$ なら、group-like と同等である。証明の方針は、*主定理が正しいならばその証明は最も自然な bar 構成から得られる* と信じてその自然な bar 構成を探すことである。

ただしこれに先立って、大昔に与えた Associahedra, Multiplihedra の自分流の具体的な記述と樹木との間の簡明で自然な対応を見つけたので、これについても報告したい。

2 樹木

A_∞ 構造に対する樹木の議論は 1971 年に Boardmann らによって Associahedra に対してまず始められ、Multiplihedra（の homotopy unit 版？）も議論されている。さらに 2008 年に Forcey らは genuine Multiplihedra の記述に際して colored trees を用いた。



その一方で、まず 1983 年の [I:83] においてこれらを当初の三重の帰納法による cube 表面の分割による構成を改良し若干単純化した形で与え、1989 年の I-Mimura [IM:89] において不等式と等式により各々 *1 行で記述* することができた：まず Associahedra を境界作用素および退化作用素と共に [IM:89] と [I:12] に従って記述しよう。

Associahedra

$$K(n) = \left\{ (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} t_i \leq k-1,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = n-1 \right\}$$

boundaries

$$\partial_j : K(r) \times K(t) \to K(n), \quad 1 \leq j \leq r,\ 2 \leq r, t,\ r+t = n+1,$$
$$\partial_j(v_1, \cdots, v_r; u_1, \cdots, u_t) = (v_1, \cdots, v_{j-1}, u_1, \cdots, u_{t-1}, u_t+v_j, \cdots, v_r).$$

degeneracies

Let $d^K_k : K(n) \to K(n-1), 1 \leq k \leq n$ be the degeneracy operation given by the following formulas, where $(t'_k, \cdots, t'_n) = \xi(t_k, \cdots, t_n)$.

$$d^K_1(t_1, \cdots, t_n) = (t'_2, \cdots, t'_n),\ k = 1,$$
$$d^K_k(t_1, \cdots, t_n) = (t_1, \cdots, t_{k-2}, t_{k-1}+t'_k, t'_{k+1}, \cdots, t'_n),\ k \geq 2.$$

ただし、$\xi(t_1,\cdots,t_n)=(t'_1,\cdots,t'_n), n\geq 1$ は、以下により帰納的に定義される。

shift 1 map

$$\begin{cases} t'_1 = \mathrm{Max}\{0, t_1-1\} \quad \text{and} \\ t'_k = \mathrm{Min}\left\{t_k, \underset{1\leq j\leq k}{\mathrm{Max}}\left\{\sum_{i=1}^{j} t_i - j\right\} - \sum_{i=1}^{k-1} t'_i + (k-1)\right\} \end{cases}$$

次に Multiplihedra も Associahedra と非常に似た形で次の様に与えられる。

Multiplihedra

$$J^a(n) = \left\{(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq k-1+a,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = n-1+a\right\},\ \ 0<a<1$$

$$\left(\text{あるいは } J(n) = \left\{(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 2k-1,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 2n-1\right\}\right)$$

primary boundaries

$$\delta^a_j : J^a(r)\times K(s) \to J^a(n),\ 1\leq j\leq r,\ 2\leq s\leq n,\ r+s=n+1,$$
$$\delta^a_j(v_1,\cdots,v_r;u_1,\cdots,u_t) = (v_1,\cdots,v_{j-1},u_1,\cdots,u_t+v_j,\cdots,v_r).$$

secondary boundaries

$$\delta^a : K(t)\times J^a(n_1)\times\cdots\times J^a(n_t) \to J^a(n),\ 1\leq n_i\ (1\leq i\leq t),\ \sum_{i=1}^{t} n_i = n,$$
$$\delta^a(u_1,\cdots,u_t;v^{(1)}_1,\cdots,v^{(1)}_{n_1};\cdots;v^{(t)}_1,\cdots,v^{(t)}_{n_t})$$
$$= (v^{(1)}_1,\cdots,v^{(1)}_{n_1}+(1-a)u_1;\cdots;v^{(t)}_1,\cdots,v^{(t)}_{n_t}+(1-a)u_t).$$

degeneracies

Let $d^{J,a}_k : J^a(n) \to J^a(n-1),\ 1\leq k\leq n$ be the degeneracy operation given by the following formulas, where $(t'_k,\cdots,t'_n)=\xi(t_k,\cdots,t_n)$.

$$d^{J,a}_1(t_1,\cdots,t_n) = (t'_2,\cdots,t'_n),\ k=1,$$
$$d^{J,a}_k(t_1,\cdots,t_n) = (t_1,\cdots,t_{k-2},t_{k-1}+t'_k,t'_{k+1},\cdots,t'_n),\ k\geq 2.$$

Associahedra や Multiplihedra に対する上の定義と樹木を用いた定義は独立に存在していたのだが、本講演で紹介するそれらの簡明で自然な関係から [IM:89] の boundary 作用素が樹木の接ぎ木に対応し、degeneracy 作用素も枝の引き抜きの自然な拡張であるのを見ることには特に難しい点はない。ただし、Associahedra に対しては通常の trivalent trees を用いるのだが、Multiplihedra に対しては Forcey の colored trees ではなく、同等だが表示の異なる bearded trees（ヒゲ付きの木：最上部にあるどの枝先からも最下部の根に降りる唯一の道に丁度一本だけヒゲが生えている）を採用した。

実際、trivalent trees の integral lattice L への shadows のなす集合 $K_L(n)$ の凸包が上記 $K(n)$ と一致し、$K(n) \cap L = K_L(n)$ が頂点の全体となる。また bearded trees の words の weight 列 のなす集合 $J^a_L(n)$（または $J_L(n)$）の凸包が上記 $J^a(n)$（または $J(n)$）に一致し、$J^a_L(n)$（または $J_L(n)$）が $J^a(n)$（または $J(n)$）の頂点の全体となる。

3 A_∞ 内部圏

位相空間及び次数付き微分代数の圏の内部で A_∞ 圏を導入する為の基礎となる枠組みとして本講演では Aguiar [Ag:97] による内部圏の定義を採用した。ただし、Aguiar は内部圏の構造を monoidal 圏における monad によって与えるのだが、本講演では、この内の monad を A_∞ 構造に取り換える。その為に、内部前圏という quiver に似た構造を定める。quiver では射の全体が source と target のみを持ち、Aguiar の枠組みでの双余代数に相当するのに対して、内部前圏はさらに恒等射の存在を要請する。さらにこれらの構造を保つものとして内部前関手を定義する。従ってこれも双余代数準同型よりも若干強い。ここで適当な operad を用いることで、これらに自然に高次のホモトピー構造を導入することができる。実際、位相空間の圏の内部前圏であれば、位相的 operad が採用できる。もし次数付き微分代数の圏の内部前圏を考えるのであれば、位相的 operad の normalised chain complex $\mathcal{K}(n)$（またはその最小部分複体 $\mathcal{K}_c(n)$）を採用できる。

4 表現

通常、内部圏が与えられると、nerve によって単体的対象が構成され、その realization として bar 構成が与えられる。それでは A_∞ 内部圏に対して、その bar 構成をその様

に自然な形で導入することは可能であろうか？ 実際、A_∞ 内部圏から単体的対象をつくることは簡単ではないが、これについては Bauer-Lipman の結果 [BL:12] がある。ただし、彼らは抽象的な operad を用いる一般論を展開し、さらに単位元については考察していない。本講演では、単体的対象の関手としての source となる圏を A_∞ operad を射とする圏に置き換えることを考える。これは難しくない上に自然であると思われるのだが、A_∞ operad を射とする圏は豊穣圏とならざるを得ず、従ってその上の関手は豊穣圏の間の関手となる。しかもそれらはその後に控える realization の為には、圏の monoidal 構造と写像空間が互いに随伴するなどの技術的な条件が必要となる。本講演ではこれを回避する目的で、関手の条件を緩めて豊穣圏の表現という概念を関手の代わりに用いる。この枠組みにおいて、右表現（反変関手に相当）と左表現（共変関手に相当）の tensor 積として realization が定義され、*最も自然な bar 構成* が得られる。

5 単位元

上記の圏論的な構成から導かれる *最も自然な bar 構成* は、実は始めに考察の対象から 外した ものであった。そこでの射影直線は unreduced な懸垂の二つの頂点を同一視したものとなり、また同値性の証明の根拠としようとしていた、Stasheff の可縮な部分複体 $D^n \subset E^{n+1}$ に対応する複体（ここでも D^n で表す）は、厳密な単位元を抜きにしては可縮とならない。今回は、次の構成により準ファイバー空間の全空間の包含写像 $E^{n-1} \hookrightarrow D^n$ が可縮となることを示した：新しい複体 $\hat{D}^n$ を E^n を含む空間として構成し、次の図が可換となる様に写像 $\hat{D}^n \to D^n$ を定義する。

最も自然な準ファイバー空間列

$$\begin{tikzcd}
E^{n-1} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & D^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[ddr] & E^n \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & D^n \arrow[dd] & \\
& \hat{D}^{n-1} \arrow[ur] & & & \hat{D}^n \arrow[ur] & & (2 \le n \le m) \\
P^{n-2} \arrow[rrr, hook] & & & P^{n-1} \arrow[rr, hook] & & P^n &
\end{tikzcd}$$

$\hat{D}^n$ の構成

(1) $\widehat{D}^0 = K(2)\times\{e\}\times * \approx *$.

(2) $\widehat{D}^n = \left(\widehat{D}^{n-1} \coprod (K(n+2)\times\{e\}\times X^n\times *)\right)/\sim,\ n \geq 1,$

where $(\partial_k(\sigma)(\rho), e, \chi, *) \sim [\rho, \bar{a}_k(\sigma)(e,\chi, *)] \in \widehat{D}^r \subset \widehat{D}^{n-1}$ for $k > 1$, and also $(\partial_1(\sigma)(\rho), e, \chi, *) \sim [\rho, \bar{a}_1(\sigma)(e,\chi, *)] \in E^{r-1} \subset E^n$ for $k = 1$ and $r \leq n$.

ここで、$\hat{D}^n$ が可縮となることが帰納法を用いて示され、E^n は E^{n+1} もしくは D^n（$n \leq m$）の中で可縮となる。この構成から元の空間とホモトピー同値となる空間で strict unit を持つものが構成され、元の空間からの包含写像が (Stasheff の意味での) A_∞ 構造を保つという意味で “疑似 A_∞ 写像” となる。ホモトピー同値写像を用いてこの strict unit を持つ A_∞ 構造を compression すれば、元の空間に strict unit を持つ A_∞ 構造が入り、恒等写像が上の意味で “疑似 A_∞ 写像” となる。ただし、ここでは準ファイバー空間となることの証明の為の技術的な仮定として、積（A_2 構造）がホモトピー逆元を持つ（loop-like）ことと、空間が CW 複体にホモトピー同値であることを要請する。

また、同様な結果が A_∞ 写像についても成立することが期待できるのだが、一方で operad のなす圏や A_∞ 関手の定義は、一見してかなり複雑なものとなる。

6 付記

本講演で述べた結果を紹介させて頂く機会を何度か与えて頂く中で、Muro 氏、蔦谷氏などから指摘を受けたことを付記したい：J. Lurie が、higher algebra についての千ページの論文の中で A_∞ 代数に対して homotopy unit を持つものが strict unit を持つことを示している。この論文はさらにもう一本の千ページの論文に依存しているとのことであるが、この homotopy unit は h-unit に対応するものと思われ、しかもその証明も位相的な再構成が可能であると考えられるが、本講演で用いた方法はずっと単純でしかも自然でもある。そういう理由で、ここでご紹介する意味もあるかと考える次第である。

A 参考文献（年代順）

[Su1:57] M. Sugawara: *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama Univ. **6** (1957), 109–-129.

[Su2:57] M. Sugawara: *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. **7** (1957), 123–-149.

[St:63] J. D. Stasheff: *Homotopy associativity of H-spaces, I & II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.

[St:70] J. D. Stasheff: *H-spaces from a Homotopy Point of View*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer, 1970.

[B:71] J. M. Boardman, *Homotopy structures and the language of trees*, Proc. Symp. in Pure Math. **22**, Amer. Math. Soc. (1971), 37–58.

[BV:73] J. M. Boardman, R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Math. **347**, Springer, 1973.

[Ad:78] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. of Math. Studies **90**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1978.

[I:83] N. Iwase: *On the ring structure of* $K^*(XP^n)$ (Japanese), Master Thesis, Kyushu University, 1983. (http://hdl.handle.net/2324/20353)

[H:84] M. Haiman: *Constructing the associahedron*, 1984, unpublished.

[IM:89] N. Iwase, M. Mimura: *Higher homotopy associativity*, "Algebraic Topology" (Arcata CA 1986), 193–220, Lecture Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, 1989.

[Ag:97] M. Aguiar: *Internal categories and quantum groups*, Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, 1997.

[F:08] S. Forcey: *Convex hull realization of the multiplihedra*, Topology and its appl. **156** (2008), 326–347.

[FOOO1:09] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono: *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[FOOO2:09] ——, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[MW:10] S. Mau and C. T. Woodward: *Geometric realizations of the Multiplihedra*, Compos. Math. **146** (2010), 1002–1028.

[MPSL:12] F. Müller-Hoissen, J. M. Pallo, J. Stasheff: *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures*, Birkhäuser, Basel, 2012.

[MT:12] F. Muro and A. Tonks: *Unital associahedra*, to appear in Forum Mathematicum, 2012.

[BL:12] T. Bauer and A. Libman: A_∞*-monads and completion*, to appear in Journal of Homotopy and Related Structures, 2012.

[I:12] N. Iwase: *Associahedra, Multiplihedra and units in* A_∞ *form*, http://arxiv.org/submit/600493, ArXiv, 2012.

Typeset by XƎLaTeX