

# 様々な非正則 Lefschetz fibration とそれらの構成について

門田 直之 (東京理科大学)\*

## 1. 序

Lefschetz fibration は, S. Lefschetz が代数曲面を調べる補助手段として導入した (Lefschetz pencil に由来する) 概念である. 1970 年代後半から 1980 年代にかけ, 種数 1 の Lefschetz fibration は楕円曲面のトポロジーの研究において基礎的な役割を果たしたことで, その重要性が認識された. 特に, 1998 年, 次の Donaldson[7] と Gompf[10] の結果によって, Lefschetz fibration と 4 次元シンプレクティック多様体 (非退化な 2 次形式を持つ 4 次元多様体) の密接な関係が明らかにされた.

**定理 1.1.** 任意の閉 4 次元シンプレクティック多様体  $X$  に対し, ある  $m > 0$  が存在して  $X \# m\overline{\mathbb{C}P}^2 \rightarrow S^2$  は Lefschetz fibration となる ([7]). 逆に, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow \Sigma_h$  ( $g \geq 2, h \geq 0$ ) に対し,  $X$  はシンプレクティック構造を持つ ([10]).

ここで  $\overline{\mathbb{C}P}^2$  は  $\mathbb{C}P^2$  の向きを逆にしたものであり,  $\Sigma_h$  は種数  $h$  の有向閉曲面を表す. 定理 1.1 が現れたのを契機に, 4 次元トポロジーにおいて Lefschetz fibration の研究やその構成が本格化し, 現在も活発に行われている.

さて, Lefschetz fibration と曲面の写像類群のある関係式は互いに対応していることが知られている. つまり, 写像類群の組合せ的な議論で, 新しい Lefschetz fibration や 4 次元シンプレクティック多様体を大量に構成することができる. “様々な 4 次元多様体の具体例を構成することで 4 次元多様体の全体像を調べよう” という立場の研究において, この事実は Lefschetz fibration の魅力の 1 つと言えよう. また, 写像類群の代数的性質と 4 次元トポロジーの性質が互いに応用できる点も大きな魅力の 1 つである.

先に述べたように, Lefschetz fibration は (複素) 代数幾何からトポロジーに導入された. そうすると複素代数幾何の範疇でない Lefschetz fibration が生じるはずである. それらを「非正則 Lefschetz fibration」と呼ぶことにする. 本稿では, 球面上の非正則 Lefschetz fibration の構成や諸研究を, 筆者自身の最近の研究も交えて, 写像類群の組合せ的な議論による観点から紹介したい.

## 2. Lefschetz fibration

まずはじめに, Lefschetz fibration と閉曲面の写像類群に関する基礎事実を述べる. より詳しくは [13], [10], [18]などを参考にしていきたい. 本稿では, 出てくる多様体, 写像は  $C^\infty$  級を仮定しておく.

### 2.1. Lefschetz fibration とモノドロミー

$X$  を有向閉 4 次元多様体とし,  $\Sigma_g$  を種数  $g$  の有向閉曲面とする.

キーワード: Lefschetz fibration, 写像類群, 非正則

\* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 (4 号館 3F)

e-mail: monden\_naoyuki@ma.noda.tus.ac.jp

**定義 2.1.**  $C^\infty$  級写像  $f: X \rightarrow S^2$  が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき,  $f$  を ( $S^2$  上の) 種数  $g$  の **Lefschetz fibration** と呼ぶ.

- (1)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  を持ち,  $f|_{f^{-1}(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\})}$  は  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  上の  $C^\infty$  級  $\Sigma_g$ -束になっている,
- (2) 各特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  は唯一つの臨界点  $p_i \in X$  を持つ. また, 各  $p_i$  の周りでは,  $p_i, b_i$  を中心とする局所複素座標  $(z_1, z_2), w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. また, 局所複素座標が定める向きは  $X, S^2$  の向きと両立している.
- (3) 各  $f^{-1}(b)$  ( $b \in S^2$ ) は自己交叉数  $(-1)$  の球面を含まない (相対極小).

図 1 は種数  $g$  の Lefschetz fibration のイメージを表している.

**注意 2.2.** 本稿では, 簡単のため底空間を  $S^2$  としたが,  $S^2$  の代わりに  $C^\infty$  級コンパクト有向曲面  $\Sigma$  としてもよい. その場合,  $X$  は  $C^\infty$  級コンパクト有向4次元多様体となり, 定義には  $b_1, \dots, b_n \in \text{Int}\Sigma, \partial X = f^{-1}(\partial\Sigma)$  という条件を加える.  $\diamond$

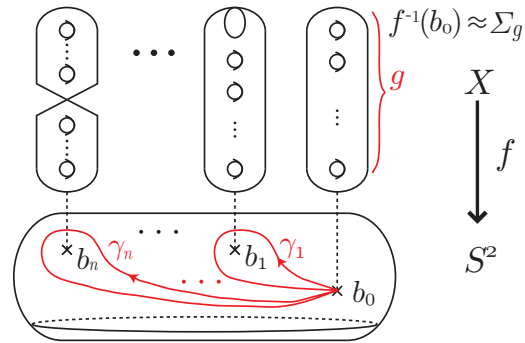


図 1: 種数  $g$  の Lefschetz fibration のイメージ.

正則 Lefschetz fibration を (変則的に) 定義する. 正則 Lefschetz fibration が 1 節で述べた複素代数幾何の Lefschetz fibration である. 本稿では, トポロジーにのみ現れる Lefschetz fibration, つまり非正則 Lefschetz fibration についての結果を紹介する.

**定義 2.3.** 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f_1: X_1 \rightarrow S^2$  が正則とは, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  ( $X_2$  は複素曲面, 射影  $f_2$  は正則写像) と向きを保つ微分同相写像  $H: X_1 \rightarrow X_2, h: S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  が存在し,  $h \circ f_1 = f_2 \circ H$  が成り立つときをいう.

$S^2$  上の Lefschetz fibration と写像類群の “positive relator” は対応する. 以下, この節の残りで, その理由を簡単に述べる.

$\Sigma_g$  の向きを保つ微分同相写像全体のなす群を  $\text{Diff}_+\Sigma_g$  とし, 恒等写像  $\text{id}_{\Sigma_g}$  に isotopic な写像全体のなす  $\text{Diff}_+\Sigma_g$  の部分群を  $\text{Diff}_0\Sigma_g$  とおく. このとき,  $\mathcal{M}_g := \text{Diff}_+\Sigma_g / \text{Diff}_0\Sigma_g$  を  $\Sigma_g$  の写像類群と呼ぶ.  $t_c (\in \mathcal{M}_g)$  で  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線  $c$  に沿った右向き **Dehn twist** を表す.

**定義 2.4.** 写像類群  $\mathcal{M}_g$  の  $n$  個の Dehn twist の積が  $t_{c_n} \cdots t_{c_2} t_{c_1} = 1$  を満たすとき,

$$t_{c_n} \cdots t_{c_2} t_{c_1}$$

を **positive relator** と呼ぶ.

$f: X \rightarrow S^2$  を定義 2.1 の Lefschetz fibration とする.  $b_0 \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  を基点とし, 同一視  $\varphi: f^{-1}(b_0) \rightarrow \Sigma_g$  (微分同相) を決めておく. 条件 (1) より  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  上の  $\Sigma_g$ -束の分類写像  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \text{BDiff}_+\Sigma_g$  を考えることができる. この分類

写像から、それぞれの基本群の間に反準同型写像

$$\Psi_f : \pi_1(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}) \rightarrow \pi_1(\text{BDiff}_+\Sigma_g) \cong \pi_0(\text{Diff}_+\Sigma_g) = \mathcal{M}_g$$

が誘導される(本稿では  $\gamma, \gamma' \in \pi_1(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\})$  の積  $\gamma\gamma'$  は  $\gamma \rightarrow \gamma'$  の順に施し,  $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_g$  の積  $\psi\varphi$  は  $\varphi \rightarrow \psi$  の順に施す. したがって,  $\Psi_f$  は反準同型写像となる).  $\Psi_f$  を  $f$  のモノドロミー表現と呼ぶ.

$\gamma_i$  を図 1 のような  $b_i$  のみを囲うループとする. すると, 条件 (2) より,  $\Psi_f(\gamma_i)$  は  $\Sigma_g$  のある単純閉曲線  $c_i$  に沿った右向き Dehn twist  $t_{c_i}$  となる. 特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  は  $f^{-1}(b_0)$  の単純閉曲線  $\varphi^{-1}(c_i)$  を 1 点に潰すことで得られる. この  $\varphi^{-1}(c_i)$  を特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  の消滅サイクルと呼ぶ.  $\Psi_f$  による  $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n = 1$  の像は  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1} = 1$  となる. よって種数  $g$  の Lefschetz fibration から  $\mathcal{M}_g$  の positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  が得られた. 逆に,  $\mathcal{M}_g$  の positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  に対し,  $D^2 \times \Sigma_g$  に  $n$  個の 2-handle を “上手く” 接着することにより,  $D^2$  上の種数  $g$  の Lefschetz fibration を構成することができる. さらに, positive relator であることから  $D^2 \times \Sigma_g$  を接合することができ,  $S^2$  上の種数  $g$  の Lefschetz fibration が構成される.

以上の議論において,  $f^{-1}(b_0)$  と  $\Sigma_g$  との同一視を与える微分同相やループ  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  の取り方を換えると, 得られる positive relator は positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  に同時共役 (simultaneous conjugation) や初等変形 (elementary transformation) を有限回施したものになっている.

## 2.2. Lefschetz fibration の例

ここでは, いくつか基礎的な Lefschetz fibration とそれに対応する positive relator を紹介する. そのために必要な単純閉曲線を用意しておこう.

$c_1, c_2, \dots, c_{2g+1}$  を図 2 のような  $\Sigma_g$  内の単純閉曲線とする. この時, 次の  $8g + 4$  個の Dehn twist の積  $h_g$  は  $\mathcal{M}_g$  の positive relator である.

$$h_g := (t_{c_1}t_{c_2} \cdots t_{c_{2g}}t_{c_{2g+1}}^2 t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2}t_{c_1})^2 (= 1)$$

positive relator  $h_g$  に対応する種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  を考えると,  $X \cong \mathbb{C}P^2 \# (4g + 5)\overline{\mathbb{C}P^2}$  である (cf [12]).

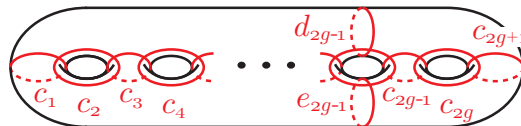


図 2: 単純閉曲線  $c_1, \dots, c_{2g+1}, d_{2g-1}, e_{2g-1}$ .

$g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき,  $B_0, B_1, \dots, B_g, c$  (resp.  $a, b$ ) を図 3 (resp. 図 4) のような  $\Sigma_g$  内の単純閉曲線とする.  $g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき, 次の  $2g + 4$  個 (resp.  $2g + 10$  個) の Dehn twist の積を  $mck_g$  とおくと,  $mck_g$  は  $\mathcal{M}_g$  の positive relator である.

$$mck_g := \begin{cases} (t_{B_0}t_{B_1} \cdots t_{B_g}t_c)^2 & (= 1) \quad (g : \text{偶数}) \\ (t_{B_0}t_{B_1} \cdots t_{B_g}t_a^2t_b^2)^2 & (= 1) \quad (g : \text{奇数}). \end{cases}$$

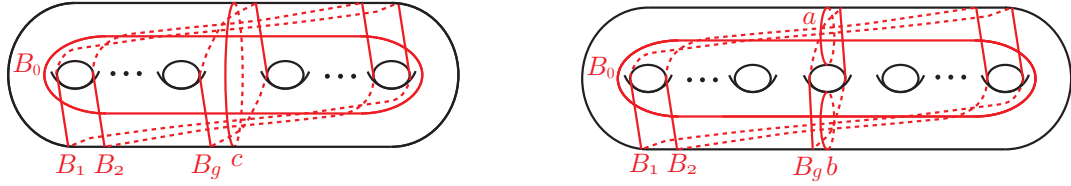


図 3: 単純閉曲線  $B_0, \dots, B_g, c$  ( $g$ :偶数) 図 4: 単純閉曲線  $B_0, \dots, B_g, a, b$  ( $g$ :奇数)

これらの positive relator は,  $g = 2$  の場合に松本幸夫氏 [18] により構成され, 後に, Cadavid[4], Korkmaz[17] により独立に  $g \geq 3$  の場合に拡張された. そこで, 本稿では positive relator  $mck_g$  に対応する種数  $g$  の Lefschetz fibration を種数  $g$  の松本 fibration と呼ぶことにする. 種数  $g$  の松本 fibration の全空間は  $g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき,  $\Sigma_{g/2} \times S^2 \sharp 4\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  (resp.  $\Sigma_{(g-1)/2} \times S^2 \sharp 8\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ ) と微分同相である.

この節の Lefschetz fibration の例は正則であることが知られている.

### 3. 複素構造を許容しない4次元多様体の構成

Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  が非正則であることを示すには, 「 $X$  が複素構造を持たない」 または 「射影  $f$  が正則写像でない」 ことを示せばよい. ここでは, 全空間に複素構造を持たない場合の非正則 Lefschetz fibration に関する結果を紹介する.

#### 3.1. 全空間が非単連結で複素構造を持たない非正則 Lefschetz fibration

全空間が非単連結で, 複素構造を持たない Lefschetz fibration は Ozbagci-Stipsicz, Korkmaz により構成された. その際, Lefschetz fibration の “足し算” である 「ファイバー和」 を用いている. そこで, まずファイバー和の定義を紹介する.

**定義 3.1.**  $f_i : X_i \rightarrow S^2$  ( $i = 1, 2$ ) を種数  $g$  の Lefschetz fibration,  $D_i \subset S^2$  を  $f_i$  の正則値のみを含む円板とし,  $x_i \in \partial D_i$  をとる. 向きを保つ微分同相  $\varphi : f_1^{-1}(x_1) \rightarrow f_2^{-1}(x_2)$  と, 向きを逆にする微分同相  $\partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  で  $X_1 - f_1^{-1}(\text{Int}D_1)$  と  $X_2 - f_2^{-1}(\text{Int}D_2)$  を両方のファイバー構造を保つように貼り合わせて得られる種数  $g$  の Lefschetz fibration を  $f_1 \sharp_{\varphi} f_2 : X_1 \sharp_{\varphi} X_2 \rightarrow S^2$  と書き,  $f_1$  と  $f_2$  の  $\varphi$  でねじったファイバー和と呼ぶ.

定義 4.1 において,  $\varphi$  の取り方により  $X_1 \sharp_{\varphi} X_2$  の微分構造は変化する. 3節ではそのような例を紹介する. また,  $f_1^{-1}(x_1) \cong f_2^{-1}(x_2) \cong \Sigma_g$  より  $\varphi$  は写像類群  $\mathcal{M}_g$  の元とみなすことができる.  $f_1, f_2$  に対応する positive relator をそれぞれ  $t_{c_n} \cdots t_{c_1}, t_{d_m} \cdots t_{d_1}$  とおくと,  $f_1 \sharp_{\varphi} f_2$  に対応する positive relator は  $t_{c_n} \cdots t_{c_1} t_{\varphi(d_m)} \cdots t_{\varphi(d_1)}$  となる.

次のような 「4次元多様体が複素構造を持たないことの十分条件」 が知られている.

**定理 3.2** (Ozbagci-Stipsicz, [21]). Lefschetz fibration  $X_n \rightarrow S^2$  が  $\pi_1(X_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  を満たすとき,  $X_n$  は (向きを取り替えても) 複素構造を許容しない.

Ozbagci-Stipsicz [21], Korkmaz [17] は無限個の非正則 Lefschetz fibration を構成した.

**定理 3.3** (Ozbagci-Stipsicz [21] ( $g = 2$ ), Korkmaz [17] ( $g \geq 3$ )).  $g \geq 2$  とし,  $f_g$  を種数  $g$  の松本 fibration とする.  $\varphi_1, \dots, \varphi_{g-1} \in \mathcal{M}_g$  を上手く選ぶと,  $\pi_1(X_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  となるファイバー和  $f_g \sharp_{\varphi_1} \cdots \sharp_{\varphi_{g-1}} f_g : X_n \rightarrow S^2$  を得る. よって,  $X_n$  は複素構造を持たない (定理 3.2).

$g = 2$  のとき,  $\varphi_1 = t_{c_5}^n$  ( $c_5$  は図 2 の単純閉曲線) である.  $g \geq 3$  のとき,  $\varphi_1, \dots, \varphi_{g-2}$  はそれぞれある単純閉曲線に沿った Dehn twist,  $\varphi_{g-1}$  はある単純閉曲線に沿った Dehn twist の  $n$  乗である.

### 3.2. 全空間が単連結で複素構造を持たない非正則 Lefschetz fibration

Fintushel-Stern[9] は, 全空間が単連結で複素構造を持たない Lefschetz fibration を構成した. その非正則性は, 次の 2次元複素代数幾何学の地誌学問題に由来する不等式を用いて示された. 以下,  $e, \sigma$  をそれぞれ概複素構造を持つ有向閉 4次元多様体  $X$  のオイラー標数, 符号数とし,  $\chi_h := (\sigma + e)/4 \in \mathbb{Z}$ ,  $K^2 := 3\sigma + 2e \in \mathbb{Z}$  とおく.

**定理 3.4** (cf. [10]). 単連結で極小な複素曲面  $S$  の不変量の組  $(\chi_h, K^2)$  は (1), (2) のどちらかを満たす.

$$(1) \ 2\chi_h - 6 \leq K^2 \leq 9\chi_h \ (\chi_h, K^2 > 0), \quad (2) \ (\chi_h, K^2) = (n, 0) \ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

特に, 任意の一般型複素曲面は (1) を満たす. (1) の前半, 後半の不等式をそれぞれ **Noether 不等式**, **Bogomolov-宮岡-Yau 不等式** と呼ぶ.

大雑把にいうと, ほとんどの複素曲面は一般型複素曲面であり, 未だ謎の多い研究対象である. 一般型複素曲面の不変量の組  $(\chi_f, K^2)$  の存在領域を調べることを一般型複素曲面の地誌学問題と呼ぶ.

Fintushel-Stern は次のような非正則 Lefschetz fibration を構成した.

**定理 3.5** (Fintushel-Stern [9]).  $g \geq 3$  に対し, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  で,  $X$  は単連結極小 4次元シンプレクティック多様体で Noether 不等式 (と定理 3.4(2)) を満たさないものが存在する. よって,  $X$  は複素構造を持たない (定理 3.4).

**注意 3.6.** 定理 3.5 の Lefschetz fibration はある 2つの正則な Lefschetz fibration をファイバー和分解される. しかし, それらに対応する positive relator は知られていない.

## 4. Lefschetz fibration の地誌学問題

筆者の知る限り, 射影が非正則の場合の結果は知られていない. しかし, 「正則 fibration の地誌学問題に由来する不変量」から, 全空間が複素構造を持たないことや射影が非正則であることがわからなくとも Lefschetz fibration が非正則であることを示すことができる. この節ではそのような例を紹介する. ここでは  $g \geq 2$  と仮定する.

### 4.1. モノドロミーの置き換え

「正則 fibration の地誌学問題に由来する不変量からわかる非正則 Lefschetz fibration の例」の多くは, 「モノドロミーの置き換え」という, Smith[23] が名づけた操作により得られている. 小林竜馬氏 (東京理科大学), 浜田法行氏 (九州大学) と筆者の最近の研究 [14] では, モノドロミーの置き換えの一般化に名前を付けた. その定義を述べる.

**定義 4.1.** 写像類群  $\mathcal{M}_g$  において  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{b_1} \cdots t_{b_m}$  であるとする. このとき,  $\varphi(a_i) = a_i$  を満たす  $\varphi \in \mathcal{M}_g$  に対し, 写像類群の関係式から  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}$  が成り立つ.  $U, V$  をそれぞれいくつかの右向き Dehn twist の積とし,

$$V t_{a_1} \cdots t_{a_n} U = 1$$

が成り立つ(つまり, positive relator である) とすると, 上記の関係式から

$$Vt_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}U = 1$$

となり,  $Vt_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}U$  もまた positive relator となる. この操作を関係式  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{b_1} \cdots t_{b_m}$  による  $\varphi$  でねじった置き換えと呼ぶ.

Fuller はモノドロミーの置き換えにより次のような種数3の Lefschetz fibration の例を構成した.  $g = 3$  とし,  $c_1, \dots, c_7, d_5, e_5$  を図2の単純閉曲線とすると,  $(t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{14} = 1$  が成り立つ. この関係式に chain 関係式  $(t_{c_1}t_{c_2}t_{c_3})^4 = t_{d_5}t_{e_5}$  による (id でねじった) 置き換えを次のように行うことで, 新しい関係式を得る.

$$\begin{aligned} (1 =) (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{14} &= (t_{c_1}t_{c_2}t_{c_3})^4 t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_1}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_6}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3} (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{10} \\ &= t_{d_5}t_{e_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_1}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_6}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3} (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{10} \quad \text{in } \mathcal{M}_3. \end{aligned}$$

最初の “=” は, 関係式  $t_{c_i}t_{c_{i+1}}t_{c_i} = t_{c_{i+1}}t_{c_i}t_{c_{i+1}}$ ,  $t_{c_i}t_{c_j} = t_{c_j}t_{c_i}$  ( $|i - j| > 1$ ) を用いて変形する. 遠藤久顕氏-永見誠二氏 [8] は, Fuller の構成法の一般化, あるいは異なるモノドロミーの置き換えにより様々な例を構成している.

#### 4.2. 正則 fibration の地誌学問題

正則 fibration の地誌学問題を紹介しよう.  $S$  を複素曲面,  $C_k$  を種数  $k$  の複素曲線 ( $C_k \cong \Sigma_k$ ) とする. 正則写像  $f : S \rightarrow C_k$  が種数  $g$  の正則 fibration であるとは, 有限個の特異ファイバーを除いて種数  $g$  の複素曲線束で相対極小となるときを言う. 種数  $g$  の正則 fibration  $f : S \rightarrow C_k$  に対し, 相対的な2つの不変量  $\chi_f, K_f^2$  を定義する:

$$\chi_f = \chi_h - (g - 1)(k - 1), \quad K_f^2 = K^2 - 8(g - 1)(k - 1).$$

不変量のペア  $(\chi_f, K_f^2)$  の存在領域を調べることを正則 fibration の地誌学問題と呼ぶ. 「 $\chi_f = 0$  の必要十分条件は  $f$  の特異ファイバーが0本」であることが知られている.  $\chi_f \neq 0$  のとき, 商

$$\lambda_f := K_f^2 / \chi_f$$

を  $f$  のスロープと呼ぶ. 正則 fibration の地誌学について次のことが知られている.

**定理 4.2.** 種数  $g$  の正則 fibration  $f : S \rightarrow C_k$  に対し,  $(\chi_f, K_f^2)$  は次を満たす.

- (1)  $\chi_f \geq 0$  (Beauville [3]),
- (2)  $K_f^2 \geq 0$  (Arakelov [2]),
- (3)  $(4 - 4/g)\chi_f \leq K_f^2 \leq 12\chi_f$  (Xiao [29]).

(3) の左辺を  $(4 - 4/g) \leq \lambda_f$  と書き換え, スロープ不等式と呼ぶ.

#### 4.3. Lefschetz fibration のスロープ

種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対しても, 同様に相対的な不変量  $\chi_f, K_f^2, \lambda_f$  が定義される:

$$\chi_f = \chi_h + (g - 1), \quad K_f^2 = K^2 + 8(g - 1), \quad \lambda_f = K_f^2 / \chi_f.$$

種数3, 4, 5の “非超楕円的” Lefschetz fibration は, それらのスロープが今野一宏氏 [15], [16], Chen[5] の結果を満たさなければ, 非正則であることがわかる. Smith[23] は, この

方法と同値な方法で4.1節の例の非正則性を示した. 遠藤久顕氏-永見誠二氏 [8] は, 上記の方法で4.1節で述べた彼らの種数3, 4, 5の例の非正則性を示している. 廣瀬進氏 [11] も自身が構成した種数3, 4の例の非正則性を同様の方法で示した.

Lefschetz fibrationの地誌学問題について次のことが知られている.

**命題 4.3.** 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対し,  $(\chi_f, K_f^2)$  は次を満たす.

- (1)  $\chi_f \geq 0$  (Smith [23]), (2)  $K_f^2 \geq 4g - 4$  (Stipsicz [26]),  
 (3)  $K_f^2 \leq 10\chi_f$  (Ozbagci [20]).

すべての種数2の Lefschetz fibration, 種数  $g$  の超楕円的 Lefschetz fibration はスロープ不等式を満たすことが知られている. これらの事実と定理 4.3 から, Lefschetz fibration の地誌学は定理 4.2 の正則 fibration の地誌学に含まれているのではないかと予想できる. 実際, 次のようなことが予想されていた.

**予想 4.4** (Hain cf.[1] Question 5.10, [8] Conjecture 4.12).  $g \geq 3$  に対し, 任意の種数  $g$  の Lefschetz fibration はスロープ不等式  $4 - 4/g \leq \lambda_f$  を満たす.

しかし, 最近, 予想 4.4 の反例が構成された ([19]). 定理 4.2 から正則 Lefschetz fibration はスロープ不等式を満たすので, これらは非正則 Lefschetz fibration である.

**定理 4.5** (M. [19]).  $g \geq 3$  に対し,  $4 - 4/g > \lambda_f$  となる種数  $g$  の Lefschetz fibration が無限個存在する. よって, これらは非正則である.

証明の概略. 2.2節の  $h_g$  に対応する Lefschetz fibration を3つ “上手く” 捻じってファイバー和し, 得られる positive relator を初等変形したものは「Lantern relation」による置き換えができる. その対応する Lefschetz fibration のスロープを調べればよい.  $\square$

## 5. (-1)-切断を持つ非正則 Lefschetz fibration

**定義 5.1.** Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対し,  $s : S^2 \rightarrow X$  が  $f \circ s = \text{id}_{S^2}$  を満たすとき,  $s$  を  $f$  の切断という.  $[s(S^2)]^2 = k$  ( $[s(S^2)] \in H_2(X)$ ) を満たす, つまり,  $s(S^2) \cong S^2$  の自己交差数が  $k$  のとき,  $s$  を  $k$ -切断と呼ぶ.

(-1)-切断を持つ  $S^2$  上の Lefschetz fibration は “Lefschetz pencil” と直接関わる上に, ファイバー和における Lefschetz fibration の構成要素とみなすことができる. この節では, (-1)-切断を持つ非正則な Lefschetz fibration に関する結果を紹介する.

### 5.1. (-1)-切断を持つ Lefschetz fibration

まずはじめに, (-1)-切断を持つ Lefschetz fibration, Lefschetz pencil と4次元シンプレクティック多様体の関係を紹介したい.  $X$  を  $C^\infty$  級有向閉4次元多様体,  $B = \{x_1, \dots, x_m\}$  を空でない有限個の  $X$  の点集合,  $\Sigma_g$  を種数  $g$  の  $C^\infty$  級有向閉曲面とする.

**定義 5.2.**  $X$  が種数  $g$  の Lefschetz pencil の構造を持つとは,  $C^\infty$  級写像  $f : X - B \rightarrow S^2$  が次の条件 (1), (2), (3) を満たすときをいう.

- (1) 各  $x_i \in B$  の近傍において,  $f$  は射影化  $\mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$  に同型である,  
 (2)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  を持ち,  $f^{-1}(b) \cup B$  ( $b \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$ ) は

$X$  の部分多様体であり,  $f^{-1}(b) \cup B \cong \Sigma_g$  となる.  $B$  を **base locus** という.

(3) 各  $f^{-1}(b_i)$  は唯1つの臨界点  $p_i \in X$  を持つ. 各  $p_i$  の周りでは,  $p_i, b_i$  を中心とする局所複素座標  $(z_1, z_2)$ ,  $w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. さらに局所複素座標が定める向きは  $X, S^2$  の向きと両立している.

次の Gompf[10] と Donaldson[7] の結果より, 4次元シンプレクティック多様体と Lefschetz pencil の密接な関係が判明した.

**定理 5.3** (cf. [10]).  $C^\infty$  級有向閉4次元多様体  $X$  がシンプレクティック構造を持つことと Lefschetz pencil の構造を持つことは必要十分条件である.

Lefschetz pencil の定義から以下のことがわかる (定義 5.2 の記号に従う).

**事実 5.4.**  $X$  が種数  $g$  の Lefschetz pencil の構造を持つとき,  $X$  の  $|B|$  回 blow up  $X \# |B| \overline{\mathbb{C}P}^2$  は少なくとも  $|B|$  個の区別される  $(-1)$ -切断を持つ種数  $g$  の Lefschetz fibration の構造を持つ. 逆に,  $(-1)$ -切断を持つ種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X' \rightarrow S^2$  に対し,  $X'$  の何回かの blow down  $X$  は種数  $g$  の Lefschetz pencil の構造を持つ.

定理 5.3 と “ $\Sigma_h$ ” 上の Lefschetz fibration の話を加えると定理 1.1 を得る.

先にも述べたように,  $(-1)$ -切断を持つ Lefschetz fibration はファイバー和における構成要素(あるいは最小単位のもの)である. この事実は, 次の定理から従う.

**定理 5.5** (Stipsicz [27], Smith [24]).  $S^2$  上の Lefschetz fibration が  $(-1)$ -切断を持つならばファイバー和として分解不可能である.

## 5.2. $(-1)$ -切断を持つ非正則 Lefschetz fibration の構成

3節で紹介したように, 正則 Lefschetz fibration 達の捻じったファイバー和により非正則 Lefschetz fibration が得られる. この事実から次の自然な問題が生じる.

**問題 5.6.** 任意の Lefschetz fibration は正則な Lefschetz fibration 達を捻じってファイバー和することで得られるか?

問題 5.6 の否定的な解答として, Smith[22] はファイバー和分解不可能で全空間に複素構造を持たない種数3の Lefschetz fibration の例を構成した. Smith, Stipsicz は定理 5.5 の系として, 次のような定理 5.6 のより強い否定的解答を与えた.

**系 5.7** (Stipsicz [27], Smith [24]). 非正則 Lefschetz fibration で  $(-1)$ -切断を持つものが無限個存在する. 定理 5.5 より, これらはファイバー和分解不可能である.

系 5.7 の証明には事実 5.4 と定理 1.1 を用いており, 具体的な positive relator は与えられていない. また, 自己交差数  $-1$  の切断を持ち, 全空間に複素構造を持たない Lefschetz fibration に対応する positive relator の具体例は, 筆者の知る限り見つからない. [14] では定理 1.1 を用いない定理 5.5 の構成的な別証明を与えた.

**定理 5.8** (Kobayashi-Hamada-M, [14]).  $g \geq 4$  に対し,  $(-1)$ -切断を持ち, 全空間に複素構造を持たない種数  $g$  の Lefschetz fibration に対応する無限個 positive relator を与えた. よって, これらは定理 5.5 よりファイバー和分解不可能である.

$(-1)$ -切断を持ち,  $\pi_1(X) = 1$  となる非正則 Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  に対応する

positive relator で、これまでに知られているのは4.1節, 4節で述べた Fuller の例, 遠藤久顕氏-永見誠二氏の数例のみである。それらのファイバーの種数は3, 4, 5であったが, 筆者らは6以上に対しても構成することができた。

**定理 5.9** (Kobayashi-Hamada-M, [14]).  $g \geq 3$  に対し,  $(-1)$ -切断を持ち, 全空間が単連結な種数  $g$  の非正則 Lefschetz fibration に対応する positive relator を与えた。定理 5.5 より, これらはファイバー和分解不可能である。

**注意 5.10.** しかしながら, Smith, 遠藤久顕氏-永見誠二氏, 定理 5.9 の例は, 全空間に複素構造を持たないかどうかわかっていない。

**注意 5.11.** 定理 5.8, 5.9 と事実 5.4 から,  $g \geq 4$  に対し無限個の非正則 Lefschetz pencil の存在がわかり,  $g \geq 3$  では単連結非正則 Lefschetz pencil の存在がわかる。

定理 5.8, 5.9 の証明の概略. 定理 5.8 (resp. 定理 5.9) では,  $g \geq 4$  (resp.  $g \geq 3$ ) 以上の種数  $g$  の松本 fibration (resp. 2.2 節の  $h_g$  に対応する Lefschetz fibration) に, ある関係式によるねじった置き換えを行うことで全空間が  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  となる (resp. スロープ不等式を満たさない) ものを得る。定理 3.2 (resp. 定理 4.2) から, 非正則が従う。 $(-1)$ -切断の存在は境界付き曲面の写像類群の関係式を考えることでわかる。□

本稿では主に非正則 Lefschetz fibration の構成について述べた。これに対し「非正則 Lefschetz fibration に対応する positive relator はどのような性質を持つか?」という問いの明確な答えは(筆者の知る限り)わかっていない。また、「どのような positive relator に対応する Lefschetz fibration が正則であるか?」と問いの答えも少ない。例えば, Siebert-Tian[28] は,  $\mathcal{M}_2$  の positive relator  $t_{c_1} \cdots t_{c_n}$  が「 $c_1, \dots, c_n$  は全て非分離的で,  $t_{c_1}, \dots, t_{c_n}$  が  $\mathcal{M}_2$  を生成する」ならば, 対応する種数2の Lefschetz fibration は正則であることを示した。しかし,  $g \geq 3$  で同様の結果が成り立つかどうかわかっていない。複素代数幾何とトポロジーの差や類似性を写像類群の言葉で表すような難しさ・面白さはこのようなところにも現れているような気がする。

謝辞. トポロジーシンポジウムにお招き下さった, 主催者の皆様にご心より感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev; *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 3, 489–545.
- [2] S. Ju. Arakelov; *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 1269–1293.
- [3] A. Beauville; *L'application canonique pour les surfaces de type general*, (French) Invent. Math. **55** (1979), no. 2, 121–140.
- [4] C. Cadavid; *A remarkable set of words in the mapping class group*, Dissertation, Univ. of Texas, Austin, 1998.
- [5] Z. Chen; *On the lower bound of the slope of a non-hyperelliptic fibration of genus 4*, Intern. J. Math. **4** (1993), 367–378.
- [6] M. Dehn; *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. **69** (1938), 135–206.
- [7] S. K. Donaldson; *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Diff. Geom. **53** (1999), 205–236.

- [8] H. Endo and S. Nagami; *Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 8, 3179–3199.
- [9] R. Fintushel and R. Stern; *Constructions of smooth 4-manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. Extra Vol. II (1998), 443–452.
- [10] R. Gompf and A. Stipsicz; *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
- [11] S. Hirose; *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka Journal of Mathematics, **47**, (2010), no.2, 385–421.
- [12] T. Ito; *Splitting of singular fibers in certain holomorphic fibrations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 425–480.
- [13] A. Kas; *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pacific J. Math. **89** (1980), 89–104.
- [14] R. Kobayashi, N. Hamada and N. Monden; *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations admitting  $(-1)$ -sections*, in preparation.
- [15] K. Konno; *A note on surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 3*, Osaka J. Math. **28** (1991), 737–745.
- [16] K. Konno; *Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces*, Ann. Sc. Norm. Pisa Sup. Ser.IV, vol.XX (1993), 575–595.
- [17] M. Korkmaz; *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations*, Internat. Math. Res. Not. (2001), no. 3, 115–128.
- [18] Y. Matsumoto; *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 123–148, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [19] N. Monden; *Lefschetz fibrations with small slope*, Pacific J. Math., to appear.
- [20] B. Ozbagci; *Signatures of Lefschetz fibrations*, Pacific J. Math. **202** (2002), 99–118.
- [21] B. Ozbagci and A. Stipsicz; *Noncomplex smooth 4-manifolds with genus-2 Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3125–3128.
- [22] I. Smith; *Symplectic geometry of Lefschetz fibrations*, Dissertation, Oxford University, 1998.
- [23] I. Smith; *Lefschetz fibrations and the Hodge bundle*, Geom. Topol. **3** (1999), 211–233.
- [24] I. Smith; *Geometric monodromy and the hyperbolic disc*, Q. J. Math. **52** (2001), no. 2, 217–228.
- [25] I. Smith; *Lefschetz pencils and divisors in moduli space*, Geom. Topol. **5** (2001), 579–608.
- [26] A. Stipsicz; *On the number of vanishing cycles in Lefschetz fibrations*, Math. Research Letters **6** (1999), 449–456.
- [27] A. Stipsicz; *Indecomposability of certain Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 5, 1499–1502.
- [28] B. Siebert and G. Tian; *On the holomorphicity of genus two Lefschetz fibrations*, Ann. of Math, **161** (2005), no. 2, 959–1020.
- [29] G. Xiao; *Fibered algebraic surfaces with low slope*, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.