

3次元多様体の指標多様体のゼータ関数について

原田 新也 (東京工業大学)*

1. Introduction

3次元多様体の $SL_2(\mathbb{C})$ 指標多様体は Culler-Shalen ([2]) により導入された基本群の $SL_2(\mathbb{C})$ 表現の指標のなす代数的集合であり, 非圧縮曲面の構成など重要な応用のあるトポロジーにおいて基本的な研究対象である. 一方有限体上の代数多様体の局所ゼータ関数 (合同ゼータ関数) や, リーマンゼータ関数の代数体上の代数多様体への一般化である Hasse-Weil ゼータ関数は数論において重要な研究対象となっている. 3次元多様体の $SL_2(\mathbb{C})$ 指標多様体は有理数体上で定義されており, そのゼータ関数にどのような幾何的・数論的な性質が反映されるかは興味深い問題である. 本稿では指標多様体の定める局所ゼータ, Hasse-Weil 型のゼータ関数を考え, それがどのような性質をもつかを考察する.

第60回トポロジーシンポジウムでの講演の機会をいただきました森下昌紀先生, 佐伯修先生, また第60回トポロジーシンポジウムプログラム責任者の皆様に感謝致します.

2. スキームの Hasse-Weil ゼータ関数

2.1. 局所ゼータ関数

X を有理整数環 \mathbb{Z} 上有限型の (アフィン) スキームとする. 具体的には, 有限個の多項式 $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$ が与えられたとする. \mathbb{F}_{p^n} を p^n 個の元をもつ有限体とするとき, X の \mathbb{F}_{p^n} 有理点の集合 $X(\mathbb{F}_{p^n})$ を f_1, \dots, f_r の \mathbb{F}_{p^n} における共通零点の集合として定義する:

$$X(\mathbb{F}_{p^n}) := \{(a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{F}_{p^n})^m \mid f_1(a_1, \dots, a_m) = \dots = f_r(a_1, \dots, a_m) = 0\}.$$

このとき素数 p における局所ゼータ関数 (合同ゼータ関数) とは以下の形式的べき級数のことである.

$$Z(X, p, T) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} T^n\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

例えば $f = T \in \mathbb{Z}[T]$ とし X を $\mathbb{Z}[T]/(f)$ の定めるアフィンスキームとすれば, 任意の素数 p について $X(\mathbb{F}_{p^n}) = \{0\}$. したがって $\#X(\mathbb{F}_{p^n}) = 1$ であり $Z(X, p, T) = (1-T)^{-1}$ となる.

局所ゼータ関数に関しては多くのことが知られているが, 特に X が有限体上の非特異射影代数多様体になっているとき Weil 予想として知られている結果がある. つまり X を有限体 \mathbb{F}_q (q は素数 p のべき) 上で定義された非特異射影代数多様体とすると, 局所ゼータ関数 $Z(X, p, T)$ は有理関数, 特に整数係数多項式たちの商として表され, 関数等式をもち, リーマン予想の類似を満たす. また X が代数体上で定義された非特異射影代数多様体 Y の reduction となっているときは $Z(X, p, T)$ を表す多項式の次数を Y のベッチ数として解釈出来る. 詳細については例えば [9] や [19], §6.1 などを参照されたい.

本研究は科研費 (課題番号:25001342) の助成を受けたものである.

キーワード: 指標多様体, ゼータ関数

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 情報理工学研究所
e-mail: harada.s.al@m.titech.ac.jp

近年トポロジーにおいても、位相不変量として基本群の有限体上の表現の数を調べる研究が行われている (cf. [11]). 局所ゼータ関数を具体的に計算することは各有限体上の表現の数を計算することに対応している. 今 $X(\mathbb{F}_q)$ を多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ への表現の全体の集合とするとこれはアフィン代数的集合になる. またこの場合 X を定義する多項式たちは整数係数多項式としてとれ, 素数及びそのべきによらない, つまり X は \mathbb{Z} 上定義される (cf. [22]). 一般に X は非特異でも既約でもないので Weil 予想を適用することは出来ないが, 有限体上有限型なスキームに対しその局所ゼータ関数 $Z(X, p, T)$ は有理関数になることは知られている ([3]). そこで

$$Z(X, p, T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} T^n\right) = \frac{\prod_i (1 - \alpha_i T)}{\prod_j (1 - \beta_j T)}$$

($\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$) と表されたとすると

$$\#X(\mathbb{F}_{p^n}) = \sum_j \beta_j^n - \sum_i \alpha_i^n$$

となる. つまり $Z(X, p, T)$ の有理関数としての表示を求めることは各有限体 \mathbb{F}_{p^n} 上の $\pi_1(M)$ の表現の数を求めることに対応している.

2.2. Hasse-Weil ゼータ関数

再び X を有限個の多項式 $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$ で定義されるアフィンスキームとする. このとき X の (Hasse-Weil) ゼータ関数を前節の局所ゼータ関数を用いて次で定義する:

$$\zeta(X, s) := \prod_{p: \text{prime number}} Z(X, p, p^{-s}).$$

このとき $\zeta(X, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \dim X$ で絶対収束する (cf. [25] or [19]).

Example 2.1. $f = T \in \mathbb{Z}[T]$, $X = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T)$ とする. このとき $Z(X, p, T) = (1 - T)^{-1}$ だった. よって

$$\zeta(X, s) = \prod_{p: \text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s).$$

すなわちリーマンゼータ関数になる. より一般に X として有限次代数体 K の整数環 \mathcal{O}_K の定めるアフィンスキームを考えた場合 $\zeta(X, s)$ は K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ となる.

一般に Dedekind ゼータ関数については, 複素数体 \mathbb{C} 上の有理型関数に解析接続し, 適当な Γ 因子をかけて完備化したものは関数等式をもつことが知られている. また $s = 1$ でのみ 1 位の極をもち, その留数も K の内在的な不変量を用いて記述される.

Dedekind ゼータ関数と同様に, よいスキーム X に対し $\zeta(X, s)$ は \mathbb{C} 上有理型に解析接続し, 適当な Γ 因子をかけて完備化したものは関数等式をもつことが予想されている (cf. [25], [19]). しかし現時点で一般に解決しているのは, 曲線の場合でも有理数体上の楕円曲線くらいであり, 難しい問題である. そこで本稿では具体的な 3 次元多様体の指標多様体に対し局所ゼータ関数, Hasse-Weil ゼータ関数を求めた結果を紹介し, どのような関数が現れるのかを報告したい.

3. 指標多様体

M を 3 次元多様体, $\pi_1(M)$ をその基本群とすると, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 指標多様体 $X(M)$ を以下の集合として定義する:

$$X(M) := \{ \chi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{C} \mid \chi = \chi_\rho \text{ は表現 } \rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ の指標} \}.$$

$X(M)$ は代数的集合, すなわち有限個の多項式の共通根の集合として表されることが知られている ([2]).

M が完備双曲構造をもつ場合, 対応する holonomy 表現 $\pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が共役を除いて一意に存在する. この表現の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への持ち上げの定める指標を含む $X(M)$ の既約成分 $X_0(M)$ を双曲成分という. 一般に指標多様体の次元の振る舞いは複雑だが, 双曲成分に限った場合以下のことが知られている.

Theorem 3.1 (cf. [26], Theorem 4.5.1). M をカスプ n の完備双曲 3 次元多様体とすると

$$\dim X_0(M) = n.$$

基本群の群表示より指標多様体を定める多項式を具体的に求める方法としては, 2 橋絡み目の場合には Riley の方法 ([23]), また一般に González-Acuña, Montesinos-Amilibia による方法 ([5]) などが知られている.

先に述べたように, 現状 Hasse-Weil ゼータ関数を一般に調べることは困難な問題であるが, まず指標多様体 (の双曲成分) がどのような代数多様体になるかを調べ, そのゼータ関数を調べるという方法をとる. 今回は特に基本的な数論的 3 次元多様体の場合について主に紹介する.

指標多様体の定義多項式に関しては多くの 3 次元多様体の場合, 特に結び目・絡み目補空間について研究されている. しかし指標多様体の代数多様体としての性質に関しては殆ど知られていない. 例えばトーラス結び目の場合 (cf. [21]) や 8 の字結び目の場合 (cf. [14]), 2 橋結び目のある族の場合 ([17]), Whitehead 絡み目の場合 ([13]) などにおいてそのような研究がされている.

4. 具体例

数論的 3 次元多様体とは, 完備双曲多様体でありその基本群が commensurability を除いて, 複素素点を唯一つ持つような代数体 K 上の全ての素点で分岐する四元数環のある order の被約ノルム 1 の元のなす群と同型であるときをいう. 数論的多様体についての参考書としては [18] がある.

ゼータ関数は同型類に対して定まる不変量なので, 本稿では commensurability より条件の強い同型類を考え, それを数論的 3 次元多様体と呼ぶことにする.

向き付け可能な完備双曲 3 次元多様体の中でカスプ 0, 1, 2 の場合最小の双曲体積を実現するものは数論的多様体であることが知られており, 数論的 3 次元多様体の場合にまず調べることは意義のあることに思われる. ここではカスプ 0, 1, 2 の場合のいくつかの具体例をあげる.

4.1. 8 の字結び目の補空間

8 の字結び目の 3 次元球面 S^3 での補空間の基本群の指標多様体はよく知られており, 次の多項式で定義される \mathbb{C}^2 内のアフィン曲線である (cf. [14]):

$$(x^2 - y - 2)(y^2 - (1 + x^2)y + 2x^2 - 1).$$

ここで $x^2 - y - 2$ は \mathbb{C}^2 内の放物線で 8 の字結び目の基本群の可約表現に対応する点からなる. 一方 $y^2 - (1+x^2)y + 2x^2 - 1$ は有理数体 \mathbb{Q} 上の楕円曲線であり, その Weierstrass 形は $E : Y^2 = X^3 - 2X + 1$, 導手は $40 = 2^3 \cdot 5$ である. 先に述べたように, 近年の Taylor-Wiles らによる谷山-志村-Weil 予想の解決により有理数体上の楕円曲線の Hasse-Weil ゼータ関数は対応する保型形式の L 関数となることから, その性質を調べることが出来るようになった. 以下に述べるのは指標多様体の中で既約指標のなす部分のゼータ関数を求めた結果である.

Proposition 4.1 (Harada [8]). M を 8 の字結び目の 3 次元球面 S^3 での補空間とし $X(M)_{\text{Irr}}$ を M の双曲成分である楕円曲線 E から $(x^2 - y - 2) = 0$ 上の点を除いたものとする. このとき

$$Z(X(M)_{\text{Irr}}, q, T) = Z(\bar{E}_p, q, T)(1 - T)^2 \left(1 - \left(\frac{20}{q}\right)T\right).$$

ここで q は素数 p のべき, \bar{E}_p は楕円曲線 E の p での reduction, すなわち有限体 \mathbb{F}_p で考えた曲線とする. $\left(\frac{20}{q}\right)$ はヤコビ記号である.

上の命題により M の Hasse-Weil ゼータ関数は

$$\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s) = \prod_p Z(X(M)_{\text{Irr}}, p, p^{-s}) = \frac{\zeta(E, s)}{\zeta(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)}$$

となる. その完備化を次で定義する:

$$\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s) := \frac{4\pi^{(3s/2)+1}}{(10\sqrt{2})^s \Gamma(s/2)^3} \times \zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s).$$

このとき次の結果が得られる:

Theorem 4.2 (Harada [8]). 関数 $\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s)$ 及びその完備化 $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$ は \mathbb{C} 上の有理型関数に解析接続される. また $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$ は次の関数等式を満たす:

$$\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 2 - s)\xi(2 - s)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2 - s) = -\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)\xi(s)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s),$$

さらに $s = 1$ は関数 $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$ の 1 位の零点となり, その係数は以下のようになる:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)}{s - 1} = -\frac{\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)}{\sqrt{10} \log(\varphi)},$$

ここで $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$, $\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)$ は φ と $\varphi - 1$ の算術幾何平均を表す.

Remark 4.3. 8 の字結び目の Alexander 多項式 $\Delta_{\mathcal{K}}(T)$ は $\Delta_{\mathcal{K}}(T) = T^2 - 3T + 1$ で与えられる. $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 1)$ に現れる $\varphi, \varphi - 1$ は Alexander 多項式の根の平方根になっていることが分かる. また Alexander 多項式の根を \mathbb{Q} に添加した体が $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である.

Remark 4.4. $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 1)$ に現れる値 $\log(\varphi)$ についても以下のように 8 の字結び目のホモロジー群との関係が知られている:

$$\begin{aligned} \log(\varphi^2) &= \log m(\Delta_{\mathcal{K}}(T)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#H_1(M_n, \mathbb{Z}))}{n}. \end{aligned}$$

ここで $m(\Delta_K(T))$ は Alexander 多項式 $\Delta_K(T)$ の Mahler 測度, また M_n は 8 の字結び目上分岐する n 次の S^3 の巡回被覆を表す. (Laurent 多項式 $P = P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ に対しその Mahler 測度 $m(P)$ を以下のものとする :

$$m(P) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |P(e^{2\pi i t_1 \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi i t_n \sqrt{-1}})| dt_1 \cdots dt_n.$$

Remark 4.5. また $\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)$ に関しても Mahler 測度を用いて次のように記述することが出来る.

$$\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dk} m(P_k)(\sqrt{5}) \right)^{-1}.$$

ここで P_k は

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - 4k$$

で定義される曲線で, 任意の複素数 $4k \neq 0, 1$ に対し楕円曲線を定める. 特に Weierstrass 形は

$$E_m : y^2 = x^3 + 2m(2m - 1)x^2 + m^2x,$$

で与えられる. ただし $m = k^2$.

Remark 4.6. $s = 2$ における値は

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s - 2) \xi(X(M)_{\text{Irr}}, s) = \frac{75}{2\sqrt{5}\pi^2 \mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(2)}$$

($\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(s)$ は E の L series) であるが, これも P_k の Mahler 測度を用いて表すことが出来る. R. Villegas ([27], TABLE 4) により $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(2) = \mathcal{L}'_{E/\mathbb{Q}}(0) \doteq m(P_{\sqrt{-4}/4})$ となることが数値的に確かめられていたが, 実際正しいことが Mellit ([20]) により確かめられている. また $P_{\sqrt{-4}/4}$ の定める楕円曲線は指標多様体の双曲成分である楕円曲線 E と同型である.

一般の (双曲) 2 橋結び目の指標多様体の双曲成分がどのような代数曲線かは現時点で知られていないが, [17] においてある種の (twist 結び目たちを含む) 2 橋結び目の族について, その指標多様体の双曲成分が超楕円曲線になるという結果が得られている.

4.2. 数論的 2 橋絡み目の補空間

S^3 における双曲 2 橋絡み目で数論的なものは共役を除いて 3 つ, Whitehead 絡み目, $6_2^2, 6_3^2$ であることが知られている ([4]).

Whitehead 絡み目, $6_2^2, 6_3^2$ の双曲成分は Thurston の結果により代数曲面を定める. [13], [12] において Whitehead 絡み目及びいくつかの双曲 2 橋絡み目に対して, \mathbb{C}^3 内の指標多様体の双曲成分の $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ におけるコンパクト化は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上のファイバー構造を持つことが確かめられている.

また上記の 3 つの数論的 2 橋絡み目については, その \mathbb{P}^1 上のファイバー構造は conic bundle 構造, つまり各点のファイバーは 2 次曲線になっていることが分かる ([6]). 2 次曲線は有限体上で考えたとき有理点を求めるのが容易であることから, この性質によりこれらの双曲成分のゼータ関数を求めることが出来る ([24],[7]).

Whitehead 絡み目, $6_2^2, 6_3^2$ の双曲成分の \mathbb{C}^3 における定義多項式は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} f_0 &:= z^3 - xyz^2 + (x^2 + y^2 - 2)z - xy, \\ f_1 &:= z^4 - xyz^3 + (x^2 + y^2 - 3)z^2 - xyz + 1, \\ f_2 &:= z^3 - xyz^2 + (x^2 + y^2 - 1)z - xy \end{aligned}$$

これらの $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ における斉次多項式は, 座標表示を $(x : y : u, z : w)$ とすると以下のようになる.

$$\begin{aligned} F_0 &:= u^2 z^3 - xyz^2 w + (x^2 + y^2 - 2u^2)zw^2 - xyw^3, \\ F_1 &:= u^2 z^4 - xyz^3 w + (x^2 + y^2 - 3u^2)z^2 w^2 - xyzw^3 + u^2 w^4, \\ F_2 &:= u^2 z^3 - xyz^2 w + (x^2 + y^2 - u^2)zw^2 - xyw^3. \end{aligned}$$

このとき F_0, F_1, F_2 の定める代数曲面は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : (x : y : u, z : w) \mapsto (z : w) \in \mathbb{P}^1$ に関してファイバー構造を持つ. 特に各ファイバーは conic である.

Theorem 4.7 (Harada [7]). *Whitehead* 絡み目, $6_2^2, 6_3^2$ の指標多様体の双曲成分をそれぞれ X_0, X_1, X_2 とするとき *Hasse-Weil* ゼータ関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} \zeta(X_0, s) &= \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s-1)^2\zeta(s-2)(1-2^{1-s})^2. \\ \zeta(X_1, s) &= \frac{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)^2\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1)^4\zeta(s-2)}{\zeta(s)\zeta(s-1)^4} \times \frac{(1-2^{2-2s})^2(1+2^{-s})}{(1-5^{1-s})^2(1-5^{-s})^2}. \\ \zeta(X_2, s) &= \zeta(s)^2\zeta(s-2)(1-2^{-s}). \end{aligned}$$

数論的 2 橋絡み目に関しては各ファイバーが conic であったことから具体的に書き下すことが可能であったが, Landes が計算したいくつかの例が示すように双曲 2 橋絡み目の指標多様体の双曲成分は一般に conic bundle 構造を持つわけではない. しかし \mathbb{P}^1 上のファイバー構造をもつことが分かればファイバーをなす代数曲線のゼータ関数を用いて双曲 2 橋絡み目の双曲成分のゼータ関数を書き表すことが可能であると考えられる.

Question 4.8. 一般に双曲 2 橋絡み目の指標多様体の双曲成分は \mathbb{P}^1 上のファイバー構造を持つか?

4.3. 数論的閉 3 次元多様体

Thurston の定理により双曲 3 次元多様体の双曲成分の代数的集合としての次元はカスプの数になることから, 双曲閉 3 次元多様体の場合指標多様体の構造が最も簡単であると考えられる. 双曲閉 3 次元多様体の場合, 複素数体 \mathbb{C} 上の代数的集合としては双曲成分は 0 次元, すなわち 1 点となり情報を取り出すのは難しいと思われる. しかしこれを有理整数環 \mathbb{Z} 上で考えれば 1 次元の代数的集合となり双曲閉 3 次元多様体の不変量としての性質を反映していることが期待される.

下表は Weeks manifold (体積最小の双曲 3 次元閉多様体) など体積の小さい数論的閉 3 次元多様体の中のいくつかの場合についての既約指標多様体の定義多項式及びそれらのゼータ関数の例である.

M	$X(M)_{\text{Irr}}(\mathbb{C})$ の定義多項式	$\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s)$
Weeks manifold	$T^3 - T - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
Meyerhoff manifold	$T^4 - 3T^3 + T^2 + 3T - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
m010 (-1,2)	$T^4 - 2T^2 + 4$	$\zeta_{K_M}(s)?$
m003 (-4,3)	$T^4 - T^3 - 2T^2 + 2T + 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
m004 (6,1)	$T^6 - 7T^4 + 14T^2 - 4$	$\zeta_{K_M}(s)?$
m003 (-3,4)	$T^6 + T^4 - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$

ここで K_M は双曲多様体 M の trace 体 (ホロノミー表現の像の trace によって生成される体), $X(M)_{\text{Irr}}(\mathbb{C})$ は多様体 M の $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ 既約指標のなす既約指標多様体, $\zeta_{K_M}(s)$ は K_M の Dedekind ゼータ関数. $?$ は有限個の素数 p に関する p^{-s} の有理関数の積の差を除いて一致, 特に有限個の素数を除いてそれぞれの局所因子が一致していることを意味する.

一般に数論的 3 次元多様体の commensurability 類は不変四元数環と不変 trace 体 (ホロノミー表現の trace の 2 乗で生成される代数体, 複素素点をただ 1 対もつ) の組で分類されることが知られている ([18]). 特にカuspをもつ数論的 3 次元多様体の場合不変 trace 体は虚 2 次体, 不変四元数環は不変 trace 体の全行列環なので, カuspを持つ数論的 3 次元多様体の commensurability 類は虚 2 次体で分類されるが, 閉 3 次元多様体の場合は 3 次以上の代数体も現れ複雑になる. trace 体は不変 trace 体を部分体として含むが, 総実体の場合もあり, より複雑である.

Question 4.9. (数論的) 閉 3 次元多様体 M について, $\zeta(M, s) \sim \zeta(K_M, s)$ か? すなわち有限個の素数を除いてそれぞれの局所ゼータ関数は一致するか?

4.4. トーラス結び目の補空間

ここでは S^3 におけるトーラス結び目の補空間の A 多項式の定めるゼータ関数について述べる. A 多項式は [1] において導入された指標多様体及び meridian, longitude に付随する曲線であり, 双曲多様体の場合には双曲体積との関係が予想されているなど興味深い対象である. トーラス結び目の場合, 指標多様体の定義多項式に比べ A 多項式のほうがより簡明な形をしており, こちらを先に調べるほうが適切であると思われる. (またトーラス結び目の $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 表現の共役類の数については [15], [16] において計算されている.)

(s, t) トーラス結び目の A 多項式は以下の形に表されることが知られている (cf. [10]):

$$A(L, M) = \begin{cases} (L-1)(-1 + (LM^{st})^2), & \text{if } s, t > 2, \\ (L-1)(-1 + LM^{2(2m+1)}), & \text{if } (s, t) = (2, 2m+1). \end{cases}$$

詳細は述べないが [28] における議論を参考にするとトーラス結び目の A 多項式のゼータ関数は以下のように表されることが分かる.

Proposition 4.10.

$$\zeta(X(A(L, M)), s) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(T^{2st} - 1, s)} \frac{\zeta(s-1)^3}{\zeta(s)^2} \frac{1 - 2^{1-s}}{1 - 2^s}, & \text{if } s, t > 2, \\ \frac{\zeta(T^{2(2m+1)} - 1, s)}{\zeta(T^{4(2m+1)} - 1, s)} \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}, & \text{if } (s, t) = (2, 2m+1). \end{cases}$$

したがって $T^n - 1$ の定めるゼータ関数を求めることが出来れば、トーラス結び目のゼータ関数を調べられるのだが、 $\zeta(T^n - 1, s)$ の性質について著者はまだ分かっていない。以下に (2, 3), (2, 5) torus 結び目の場合についての例を挙げておく。

$$Z(X^6 - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)^2(1+T)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1 - (\frac{p}{3})T)^2}, & \text{if } p \neq 2, 3. \end{cases}$$

$$Z(X^{10} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)(1-T^4)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1-T)^{10}}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 1 \pmod{5}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^4}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 4 \pmod{5}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^4)^2}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 2, 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

$$Z(X^{12} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)^2(1+T)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1-T)^8(1 - (\frac{p}{3})T)^4}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{(1-T)^6(1-T^2)^3}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 7 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^5}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

$$Z(X^{20} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)(1-T^4)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^4}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1-T)^{20}}, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)(1-T^4)^4}, & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1-T^2)^8}, & \text{if } p \equiv 9 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^{10}(1-T^2)^5}, & \text{if } p \equiv 11 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1-T^4)^4}, & \text{if } p \equiv 13, 17 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^9}, & \text{if } p \equiv 19 \pmod{20}. \end{cases}$$

$$\frac{Z(X^{12} - 1, p, T)}{Z(X^6 - 1, p, T)} = \begin{cases} 1, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{1 - T^2}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1 - T)^6}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 1 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^2)^2}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 5 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)^3}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 7, 11 \pmod{12}, \end{cases}$$

$$\frac{Z(X^{20} - 1, p, T)}{Z(X^{10} - 1, p, T)} = \begin{cases} 1, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1 - T)^2}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1 - T)^{10}}, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)(1 - T^4)^2}, & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^2)^4}, & \text{if } p \equiv 9 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)^5}, & \text{if } p \equiv 11, 19 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^4)^2}, & \text{if } p \equiv 13, 17 \pmod{20}. \end{cases}$$

(2, 3) 及び (2, 5) torus 結び目の局所ゼータ関数の表示よりそれぞれの Hasse-Weil ゼータ関数は 6 次, 10 次の (ガロアでない) 代数体の Dedekind ゼータ関数であることが予想される.

Question 4.11. (s, t) torus 結び目の Hasse-Weil ゼータ関数は st 次の (ガロアでない) 代数体の Dedekind ゼータ関数になるか? また対応する代数体と torus 結び目はどのような関係にあるか?

参考文献

- [1] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.
- [2] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. Math. (2) **117** (1983), 109–146.
- [3] B. Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631–648.
- [4] F. W. Gehring, C. Maclachlan, and G. J. Martin, *Two-generator arithmetic Kleinian groups. II*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 258–266.
- [5] F. González-Acuña and J. M. Montesinos-Amilibia, *On the character variety of group representations in $SL(2, \mathbb{C})$ and $PSL(2, \mathbb{C})$* , Math. Z. **214** (1993), 627–652.
- [6] S. Harada, *Canonical components of character varieties of arithmetic two bridge link complements*, preprint, <http://arxiv.org/abs/1112.3441>.
- [7] ———, *Hasse-weil zeta functions of 2-character varieties of arithmetic two-bridge link complements*, preprint, <http://arxiv.org/abs/1207.6177>.

- [8] ———, *Hasse-Weil zeta function of absolutely irreducible SL_2 -representations of the figure 8 knot group*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3115–3125.
- [9] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Grad. Texts in Math., **52**.
- [10] K. Hikami, *Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot*, Internat. J. Math. **15** (2004), 959–965.
- [11] T. Kitano and M. Suzuki, *On the number of $SL(2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -representations of knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250003, 18.
- [12] E. Landes, *On the canonical components of character varieties of hyperbolic 2-bridge link complements*, Available at <http://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/ETD-UT-2011-08-2877/LANDES-DISSERTATION.pdf?sequence=1>.
- [13] ———, *Identifying the canonical component for the Whitehead link*, Math. Res. Lett. **18** (2011), 715–731.
- [14] W. Li and Q. Wang, *An $SL_2(\mathbb{C})$ algebro-geometric invariant of knots*, Internat. J. Math. **22** (2011), 1209–1230.
- [15] W. Li and L. Xu, *Counting $SL_2(\mathbb{F}_{2^s})$ representations of torus knot groups*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **19** (2003), 233–244.
- [16] ———, *Counting $SL_2(\mathbb{F}_q)$ -representations of torus knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 401–426.
- [17] M. L. Macasieb, K. L. Petersen, and R. M. van Luijk, *On character varieties of two-bridge knot groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **103** (2011), 473–507.
- [18] C. Maclachlan and A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Grad. Texts in Math., **219**, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [19] Y. I. Manin and A. A. Panchishkin, *Introduction to modern number theory*, second ed., Encyclopaedia of Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [20] A. Mellit, *Elliptic dilogarithms and parallel lines*, preprint.
- [21] V. Muñoz, *The $SL(2, \mathbb{C})$ -character varieties of torus knots*, Rev. Mat. Complut. **22** (2009), 489–497.
- [22] C. Procesi, *Deformations of representations*, Methods in ring theory (Levico Terme, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **198**, Dekker, New York, 1998, 247–276.
- [23] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), 191–208.
- [24] S. Rybakov, *Zeta functions of conic bundles and Del Pezzo surfaces of degree 4 over finite fields*, Mosc. Math. J. **5** (2005), 919–926, 974.
- [25] J.-P. Serre, *Zeta and L functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York, 1965, pp. 82–92.
- [26] P. B. Shalen, *Representations of 3-manifold groups*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, 955–1044.
- [27] F. R. Villegas, *Modular Mahler measures. I*, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl., **467**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 17–48.
- [28] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.