

4次元多様体内の曲面の変形と写像類群

廣瀬 進 (東京理科大学)*

1. Introduction

幾何学的トポロジーの研究の様々な場面で、ある多様体の部分多様体となっている曲面を考察する必要が生じる。曲面の見方としては次の二通りの見方がある：

- (1) ただの部分集合と見なす,
- (2) 曲面から多様体への写像と見なす.

この二つの見方の間には大きな違いがある。 S を曲面, M を4次元多様体とし, $e : S \rightarrow M$ を S の M への埋め込みとする。 ϕ を S 上の恒等写像ではない可微分同相写像とすると, (1) の見方では $e(S)$ と $e \circ \phi(S)$ とは同じ物であるが, (2) の見方では e と $e \circ \phi$ とは違う物になってしまう。つまり, (1) と (2) の見方の違いは S 上の可微分同相写像全体だけあるが, これでは余りにも大きすぎる。一方, 幾何学的トポロジーの研究においては, しばしば isotopic なものを同じと見なすことがあることから, ここでも, isotopic な写像を同一視することにする。 S 上の可微分同相写像 ϕ が恒等写像と isotopic であれば明らかに $e \circ \phi$ は e と isotopic である。問題は, 曲面 S の4次元多様体 M への埋め込み e と S 上の恒等写像と isotopic ではない可微分同相写像 ϕ で $e \circ \phi$ が e と isotopic なものが存在するかどうかであるが, 実際に存在する。

Example 1.1. (tube trick) $S^3 \times [-1, 1]$ に埋め込まれた閉曲面の変形を考察する。そ

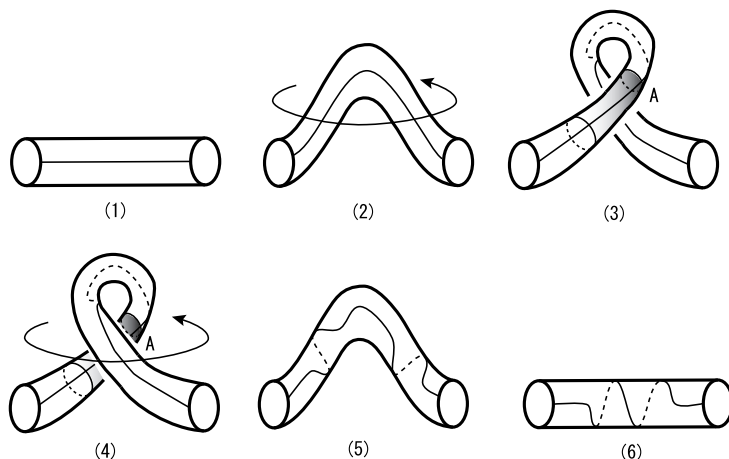


図 1: Tube trick

の閉曲面上の単純閉曲線 c で, その正則近傍 N が $S^3 \times \{0\}$ 内で図 1 の (1) の様であるものがあるとする。ここで, N を境界を固定しつつ図 1 の通り $S^3 \times [-1, 1]$ 内で変形する。まず, $S^3 \times \{0\}$ の中で, N を (1) から (3) の通りにねじる。その後, N 上の

本研究は科研費 (課題番号:24540096) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57Q45, 20F38

キーワード: knotted surface, 4-manifold, mapping class group

* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

e-mail: hirose_susumu@ma.noda.tus.ac.jp

web: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/suh/>

影のついた annulus A について, $N \setminus \text{int } A$ では $t = 0$, $\text{int } A$ では $t > 0$ となる様に変形する. なお, $t: S^3 \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ を第2成分への射影とする. すると, (4)にある通り, N を A における交差が上下逆になる様に変形できる. 最後に, $S^3 \times \{0\}$ の中で, N を (4) から (6) の通りにねじる. これら一連の変形は, c に沿った2回の Dehn twist を引き起こす.

Example 1.2. 非特異3次曲線の変形を考察する. 2次元トーラス T^2 は, 複素平面 \mathbb{C} の格子 $L_0 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$ による商と見なすことが出来る. そこで, $\wp(z)$ を 1 と $\sqrt{-1}$ を二つの周期とする Weierstrass の \wp 関数とする. すなわち,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L_0 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right\}.$$

と定める. $T^2 = \mathbb{C}/L_0$ の各点 $[z]$ に対して, $\phi([z]) = [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$ と定めることにより, T^2 を複素射影平面 $\mathbb{C}P^2 = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\}$ に埋め込むことが出来, この埋め込みの像が非特異3次曲線になっている. ここで, 格子 L_0 を $0 \leq t \leq 1$ を変形パラメータとして $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{-1} + t)$ と変形すると, それに伴い, 非特異3次曲線が $\mathbb{C}P^2$ 内で変形し, $t = 1$ で最終的にもとの場所に戻るが, \mathbb{C} の実軸方向の単位区間が定める T^2 上の単純閉曲線 $\{[t] \mid t \in [0, 1]\}$ に沿った Dehn twist がひきおこされる.

本講演では, 上記の2例の様な4次元多様体に埋め込まれた閉曲面の isotopic な変形により引き起こされる閉曲面上の非自明な写像について紹介する.

2. 問題設定

向き付け可能閉曲面 S 上の向きを保つ可微分同相写像全体のなす群を $\text{Diff}_+(S)$ と表し, その isotopy 類のなす群を S の**写像類群**と呼び, $\mathcal{M}(S)$ で表す. また, 向き付け不可能閉曲面 S 上の可微分同相写像全体のなす群を $\text{Diff}(S)$ と表し, その isotopy 類のなす群も S の**写像類群**と呼び, $\mathcal{M}(S)$ で表す. なお, ここでは $\phi\psi$ は ψ の後 ϕ を作用させるものとする.

§1 では, 閉曲面 S の4次元多様体 M への埋め込み $e: S \rightarrow M$ と S 上の可微分同相写像 ϕ で, ϕ 自身は S 上の恒等写像と isotopic ではないが, $e \circ \phi$ が e と isotopic になる例を紹介したが, このとき isotopy 拡張定理 (例えば, [20] や [46, §3.1]を参照せよ) より, M 上の可微分同相写像 Φ で $\Phi|_S = \phi$ となるものが存在する. そこで, 次のとおり定義する: e を閉曲面 S の微分可能4次元多様体 M への微分可能な埋め込みとする. S 上の可微分同相写像 ϕ が **e -extendable** とは, 次の図式を可換にする M 上の可微分同相写像 Φ が存在することである.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & S^4 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ S & \xrightarrow{e} & S^4. \end{array}$$

もしも, ϕ_1, ϕ_2 が互いに isotopic であり, さらに, ϕ_1 が e -extendable であれば, ϕ_2 が e -extendable であることがわかる. 従って, ϕ が代表する写像類群 $\mathcal{M}(S)$ の元 $[\phi]$ が **e -extendable** であることを, ϕ が e -extendable であることと矛盾なく定めることができる. なお, 以下では, $[\phi] \in \mathcal{M}(S)$ のことも ϕ と書くこととする.

Remark 2.1. 上記の Φ を可微分同相写像ではなく同相写像とした場合の e -extendability について Shicheng Wang 氏ら [8, 33] が考察している.

以下では, 特に断らない限り**対象となる多様体や写像は微分可能なものとする.**

3. 写像類群の生成系

3.1. 向き付け可能閉曲面の写像類群の生成系

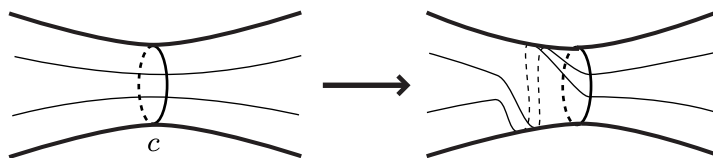


図 2: The right Dehn twist about c

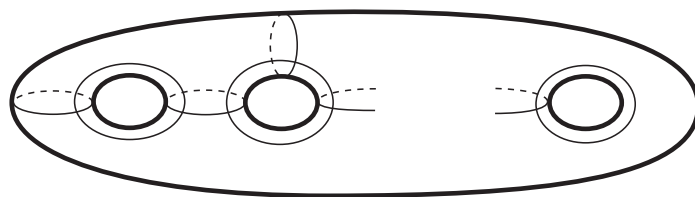


図 3: Humphries' generators of $\mathcal{M}(\Sigma_g)$

Σ_g を種数 g の有向閉曲面, すなわち g 個の 2次元トーラスを連結和して得られる曲面とする. Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿った **right Dehn twist** とは, 図2に描かれているように, c で Σ_g を切り開き, 1回ねじり, 張り合わせるにより定まる Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像のことである. 写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が有限個の Dehn twist により生成されることが Dehn [6] により示され, その後, Lickorish [30] により再度示された. Humphries [22] は, 図3に描かれた単純閉曲線に沿った Dehn twist により $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が生成されること, さらに, Dehn twist による生成元は $2g + 1$ 以上必要であることを示した.

写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ についての基本的な事柄については, 例えば, [2], [10], [24], 日本語の文献としては [43] や近日出版予定の [1] を参照せよ.

3.2. 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系

N_g を種数 g の向き付け不可能閉曲面, すなわち g 個の実射影平面を連結和して得られる曲面とする. N_g 上の単純閉曲線 c の正則近傍が annulus (resp. Möbius band) であるとき c を A -circle (resp. M -circle) と呼ぶ. A -circle c に沿った Dehn twist を t_c と書き, twist のねじりの方向を c のそばの矢印で表すこととする. Lickorish [31, 32] は, $\mathcal{M}(N_g)$ が Dehn twist のみでは生成されず, Dehn twist と Y -homeomorphism と呼ばれる写像で生成されることを示している. ここで, Y -homeomorphism の定義をする: m を M -circle, a を A -circle で, 互いに一点で横断的に交わっているものとする. $K \subset N_g$ を $m \cup a$ の正則近傍, すなわち m の正則近傍である Möbius band と a の近傍である annulus の plumbing とする. このとき, K は一つ穴のあいた Klein bottle と同相である. 図4の様に, K の境界を固定しつつ M を a に沿って一周させる N_g 上の同相写像 $Y_{m,a}$ を Y -homeomorphism と呼ぶ.

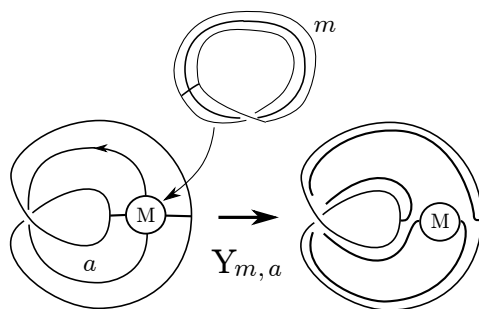


図 4: M with circle indicates a place where to attach a Möbius band

Chillingworth [5] は $\mathcal{M}(N_g)$ が有限生成であることを示しており、具体的に生成系を求めている. 一方, Birman と Chillingworth [3] は N_g の向き付け可能な2重被覆への写像の持ち上げを用いた議論により $\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系を求めている. 本講演では, Szepietowski [44] による次の生成系を用いる.

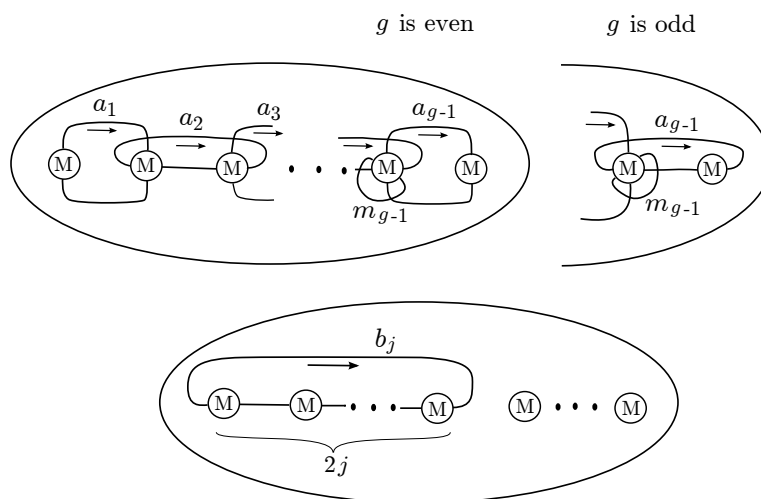


図 5: Generators for $\mathcal{M}(N_g)$.

Theorem 3.1. [44, Theorem 3.3] a_1, \dots, a_{g-1}, b_j ($1 \leq j \leq g/2$), m_{g-1} を図 5 のとおりの N_g 上の単純閉曲線とする. このとき, $t_{a_1}, \dots, t_{a_{g-1}}, t_{b_j}$ ($1 \leq j \leq g/2$), $Y_{m_{g-1}, a_{g-1}}$ が $\mathcal{M}(N_g)$ を生成する

4. 標準的な埋め込みについて

4.1. 向き付け可能な場合

3次元球体に g 個の 1-handle を接合して得られる向き付け可能コンパクト3次元多様体 H_g を3次元ハンドル体と呼ぶ. 細川藤次氏と河内明夫氏 [21] により H_g の S^4 への埋め込みの像は up to isotopy で一意であることが示されている. 埋め込み $st : \Sigma_g \rightarrow S^4$ の像 $st(\Sigma_g)$ が S^4 に埋め込まれた3次元ハンドル体 H_g の境界であるとき, st を標準的な埋め込みと呼ぶ.

閉曲面 S の単連結な閉4次元多様体 M への埋め込み e が, 任意の $X \in H_2(M; \mathbb{Z})$ について $e(\Sigma_g) \cdot X = X \cdot X \pmod{2}$ を代数的交点数 \cdot に関して満たすとき, e が characteristic

であるという. S が向き付け可能のとき Rokhlin [39] により¹, S が向き付け不可能な場合を含む形で Guillou と Marin ([11], [35]) により, 二次形式 $q_e : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ が定義された: C を S にはめ込まれた閉曲線とし, D を M にはめ込まれた向き付け可能曲面で $\partial D = e(C)$ かつ N_g と接しないものとする. D の法バンドルを ν_D とすると, $\nu_D|_{e(C)}$ は solid torus であり ν_D の自明化をもとに自明化がなされているものとする. なお, この自明化は ν_D の自明化のとり方によらないことが知られている. $N_{N_g}(C)$ を N_g における C の正則近傍とすると, $e(N_{N_g}(C))$ は $\nu_D|_{e(C)}$ 内のねじれた annulus もしくは Möbius band になっており, $n(D)$ で上記で与えた $\nu_D|_{e(C)}$ の自明化のもとの $e(N_{N_g}(C))$ の右半ねじりの回数を表す. $D \cdot e(N_g)$ を D と $e(N_g)$ の mod-2 交点数, $Self(C)$ を C の mod-2 自己交点数, $2 \times$ を $2 \times [n]_2 = [2n]_4$ で定まる単射 $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ とする. このとき, $n(D) + 2 \times D \cdot e(N_g) + 2 \times Self(C) \pmod{4}$ は C の mod-2 homology 類 $[C]$ のみに依存することが知られており, 写像 $q_e : H_1(S; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ を

$$q_e([C]) = n(D) + 2 \times D \cdot e(F) + 2 \times Self(C) \pmod{4}.$$

で定める. この写像 q_e が次の等式を満たすことに注意しておく.

$$q_e(x + y) = q_e(x) + q_e(y) + 2 \times (x \cdot y)_2,$$

ここで, $(x \cdot y)_2$ は x と y の間の mod-2 交点数である. また, q_e の定義より, $\phi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ が e -extendable ならば ϕ が q_e を保つこと, すなわち, 任意の $x \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ に対して $q_e(\phi_*(x)) = q_e(x)$ が成り立つことがわかる.

標準的な埋め込み $st : \Sigma_g \rightarrow S^4$ は, $H_2(S^4; \mathbb{Z}_2) = 0$ より characteristic であるので, q_{st} が定まっており, 上記の考察より $\phi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ が st -extendable ならば ϕ が q_{st} を保つことがわかるが, 逆も成立する.

Theorem 4.1 ([36] ($g = 1$), [14] ($g \geq 2$)). Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像 ϕ が q_{st} を保つことは, ϕ が e -extendable であるための必要十分条件となっている.

この定理は, [7], [27] や [28] の結果等をもとに, q_{st} を保つ $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の部分群の有限生成系を具体的に求め, それらが st -extendable であることを確かめることにより示された.

4.2. 向き付け不可能な場合

4次元球面 $S^4 = D^4 \cup D^4$ 内の $S^3 = \partial D^4$ の正則近傍を $S^3 \times [-1, 1]$ と表す. 埋め込み $os : N_g \hookrightarrow S^4$ について $os(N_g) \subset S^3 \times [-1, 1]$ が図6の様になっているとき, os を o -standard と呼ぶ². [21, Definition 3.5.1]において, $os(N_g)$ は unknotted belonging to the knot type of $F_{g-[g/2], [g/2]}$ と呼ばれている. なお, $[t]$ は $n \leq t$ を満たす最大の整数のことである.

¹ 松本幸夫先生が集中講義「4次元多様体の初等的病理現象について」(1997年, 奈良女子大学)で Rokhlin の二次形式が well-defined であることや Rokhlin の定理をまさに目に見えるような形で証明された時の講義ノートが <http://www.math.nara-wu.ac.jp/personal/tsuyoshi/1997/yukio/yukio.htm> からご覧いただけます.

² 当初は $t = 0$ における band の向きが全て同じである “ p -standard” 埋め込み (“ p ” は “parallel” を意味する) について考察していたが, なかなか上手くいかなかった [16]. とある研究集会やセミナーで, 河内明夫先生や高瀬将道氏から, ここで定義した曲面について議論するようにアドバイスを頂き考えたところ, Theorem 4.2 を示すことができた. “ p -standard” の前に考えるべき埋め込みであったので, “ o -standard” と名付けた.

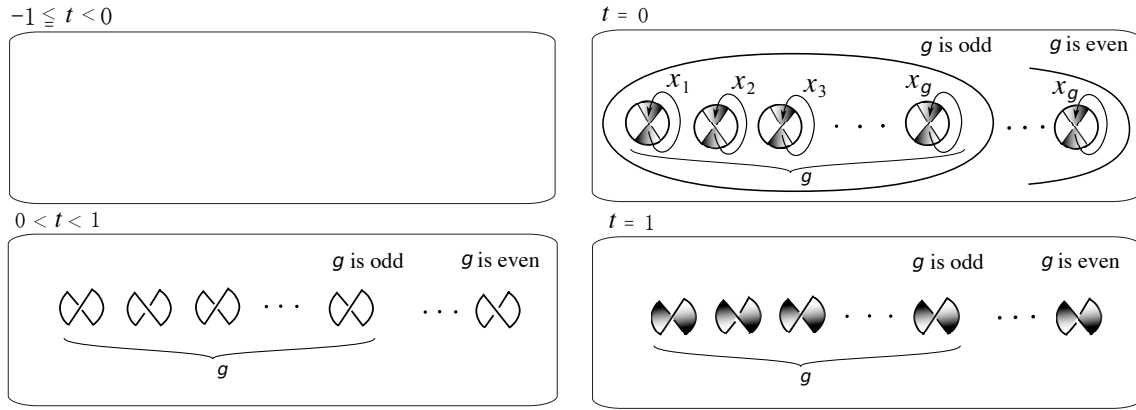


図 6: The motion picture of the o -standard embedding of N_g into S^4 .

この埋め込み $os : N_g \rightarrow S^4$ は characteristic であり, 図6で定められた $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{x_1, \dots, x_g\}$ に対して $q_{os}(x_{2i-1}) = +1, q_{os}(x_{2i}) = -1$ が成り立っている. 2次形式 q_{os} の定義より $\phi \in \text{Diff}(N_g)$ が os -extendable ならば ϕ が q_{os} を保つことがわかるが, 逆も成立する.

Theorem 4.2. [17, Theorem 1.2] N_g 上の可微分同相写像 ϕ が q_{os} を保つことは, ϕ が os -extendable であるための必要十分条件となっている.

この定理も, [38] や [45] の結果等をもとに q_{os} を保つ $\mathcal{M}(N_g)$ の部分群の生成系を具体的に求め, それらが os -extendable であることを確かめることにより示された. なお, $\mathcal{M}(N_g)$ の部分群で $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ への作用が自明であるものなす部分群 $\Gamma_2(N_g)$ の有限生成系が [45] で求められているが, 最近, 佐藤正寿氏と筆者 [18] により, $\Gamma_2(N_g)$ のアーベル化と最小生成系が求められた.

5. 4 次元多様体内の flexible 曲面

この節では主として安原晃氏との共同研究 [19] について述べる.

閉曲面 S の単連結4次元多様体 M への埋め込み e が flexible とは, 任意の $\phi \in \mathcal{M}(S)$ が e -extendable であることである. 例1.2から直ちにわかるとおり, $\mathbb{C}P^2$ 内の非特異3次曲線は flexible である. さらに, [15]で, $\mathbb{C}P^2$ 内の非特異4次曲線や自明な Σ_g の埋め込みが flexible であることが示されている. なお, $n > 3$ が奇数の場合, 非特異 n 次曲線は characteristic であるため flexible にはならないが, $n > 4$ が偶数の場合, 非特異 n 次曲線が flexible かどうかは筆者の知る限り未解決である. 一方, S^4 内の閉曲面は必ず characteristic であることから, 種数1以上の有向閉曲面の S^4 への埋め込みは flexible ではない. S^4 以外の4次元多様体への flexible な埋め込みの存在について次の定理を示した.

Theorem 5.1. [19, Theorem 3.1] 4次元多様体 M が $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}, S^2 \times S^2$, 楕円曲面 $E(n)$, もしくは, それらの連結和とすると, 任意の閉曲面 S の M への flexible な埋め込みがある.

上記の定理における4次元多様体内に, 2つの横断的に交わる2次元球面で1点で横断的に交わるものが存在し, その交点の正則近傍は, 下記の定理の条件を満たす4次元球体であることから上記の定理が従う.

Theorem 5.2. [19, Theorem 3.3 and 3.4] M を 4次元多様体, D^4 を M 内の 4次元球体とし, さらに, H を $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$ 内の Hopf link (定義は, Example 5.3 を参照) とする. もしも H が $M \setminus \text{int}D^4$ 内の交わらない 2 枚の円盤の境界となっているならば, 任意の閉曲面 S の M への flexible な埋め込みがある.

上記の定理は, 実際に flexible な埋め込み $e : S \rightarrow M$ を構成することにより示された. 例えば, $S = \Sigma_g$ の場合は次の様に構成する. まず, 3次元ハンドル体 H_g を $\partial(M \setminus \text{int}D^4) = S^3$ へ標準的に埋め込む, すなわち, $\partial(M \setminus \text{int}D^4) \setminus H_g$ の閉包が H_g と同相であるように埋め込む. ∂H_g 上の任意の点 p の $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$ における近傍 B^3

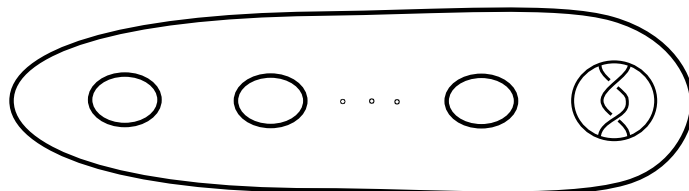


図 7:

をとり, 図7の様に $\partial H_g \setminus \text{int}B^3$ に 1 回ねじれた band を接合して出来た曲面を S' と呼ぶ. $\partial S'$ は $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$ における Hopf link であるから, 定理の仮定より $M \setminus \text{int}D^4$ 内の 2 つの円盤 D_1 と D_2 で $\partial(D_1 \cup D_2) = \partial S'$ となるものがある. $S'' = S' \cup D_1 \cup D_2$ とし, e を Σ_g の M への埋め込みで $e(\Sigma_g) = S''$ となっているものとする. 図3の各

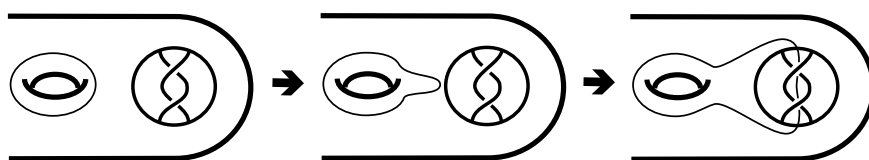


図 8:

単純閉曲線 c を D_1 もしくは D_2 の上を滑らせることにより, 図8の様に, c の近傍を Hopf band とすることが出来る. 下記の Example 5.3 により c に沿った Dehn twist が e -extendable であることがわかる. これより, e が flexible であることが示された.

Example 5.3. (Hopf band trick) 図9にある通り S^3 内に埋め込まれたアニュラス

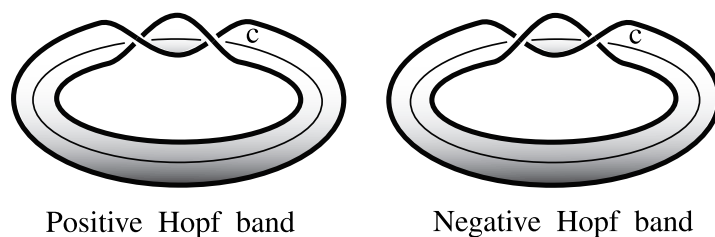


図 9:

を Hopf band と呼び, その境界として定まる絡み目を Hopf link と呼ぶ. この Hopf band (したがって Hopf link) には二通りのものがあるが, ここでは区別しない. Hopf link は, Hopf band をファイバーとし, core となっている閉曲線 c に沿った 1 回の

Dehn twist をモノドロミーとする fiber link である. すなわち, S^3 上の同相写像 f で $f(B) = B$, $f|_B = t_c$ となり恒等写像 id_{S^3} と isotopic なものが存在する. ここで, B を4次元球体 D の境界 S^3 内の Hopf band, B の内部を D^4 の内部へ押しこんだものを B' , その core を c とする. f と id_{S^3} との間の isotopy を利用することにより D^4 の同相写像 ϕ で恒等写像 id_{D^4} と isotopic であり $\phi_{\partial D^4} = id_{\partial D^4}$, $\phi_{B'} = t_c$ となるものを構成できる.

さらに, 単連結な4次元多様体内のいかなる閉曲面も up to “stabilization” で flexible だとわかる. すなわち,

Theorem 5.4. [19, Theorem 4.1] 閉曲面 S の単連結な4次元多様体 M への任意の埋め込み e に対して, その stabilization $(M \# S^2 \times S^2, e(S) \# S^2 \times \{p\})$ は flexible である.

この定理は, S 上の任意の単純閉曲線 c に対して, それを境界とする埋め込まれた円盤をとり, Norman-鈴木 trick ([37],[42]) を用いることで c の D における正則近傍のねじれている回数を1回に調整し, Hopf band trick (例 5.3) を適用することにより示される.

6. S^4 内の knot した曲面の場合, および, Dehn filling について

以上では, 4次元多様体内のある意味で unknotted な曲面を扱っていた. Knot した曲面 ($\neq S^2, \mathbb{R}P^2$) について同様の問題があるが, 現時点では, 筆者の知る限り, 結び目の spun や twisted spun についてのみ結果が得られている. なお, 結び目 (S^3, k) の spun や twisted spun とは, $p \in S^3 \setminus k$ について $(S^3 \times S^1, k \times S^1)$ を $p \times S^1$ で手術する, すなわち $p \times S^1$ の近傍 $D^3 \times S^1$ を $S^2 \times D^2$ で置き換えることによつて得られる S^4 内の2次元トーラス T^2 の埋め込みである. トーラス結び目の spun や twisted spun 上の同相写像の extendability については岩瀬順一氏による結果 [26] があり, 筆者は [13] で一般の結び目の spun や twisted spun に拡張した.

Σ_g の埋め込み $e : \Sigma_g \rightarrow M$ について, $S = e(\Sigma_g)$, S の M における正則近傍を $N(S)$, $E(S) = M \setminus \text{int } N(S)$ と表す. $\partial N(S)$ から $\partial E(S)$ への向きを逆にする同相写像を f と表し, $M(S, f) = E(S) \cup_f N(S)$ と定め, S に沿った f による Dehn filling と呼ぶ. 岩瀬順一氏 [25, 26] はトーラス結び目の spun や twisted spun に沿った Dehn filling について考察している. 一方, M 内の曲面 S について $M = M(S, f)$ が任意の f に対して成り立つとき, reflexive と呼ばれ, 佐藤好久氏 [40] は $S^2 \times S^2$ 内に無限個の reflexive な球面の埋め込みを構成している. さらに, $g \geq 2$ の場合, Hillman 氏と河内明夫氏 [21] が任意の埋め込み $e : \Sigma_g \rightarrow M$ が reflexive であることを示している.

7. 未解決問題

Problem 7.1. Σ_g 上の有限位数の写像 ϕ で q_{st} を保つものに対して, S^4 上の有限位数の写像 Φ で $st(\Sigma_g)$ を集合として保ち, $\Phi|_{st(\Sigma_g)} = \phi$ となるものが存在するか?

[この問題は, Darryl McCullough 氏や山田裕一氏からの筆者への質問を元に設定した. いわば, 曲面結び目版 Nielsen 実現問題.]

Problem 7.2. 埋め込み $e : \Sigma_g \rightarrow S^4$ に対して

$$\mathcal{E}^+(e) = \{\phi \in \mathcal{M}(\Sigma_g) \mid \phi \text{ は } e\text{-extendable である}\}.$$

と定める. q_e と q_{st} の *Arf* 不変量が一致することから, q_e と q_{st} は同値であり, $\mathcal{E}^+(e)$ は $\mathcal{M}(\Sigma_g)[q_{st}]$ の部分群とみなせる. どのような $\mathcal{M}(\Sigma_g)[q_{st}]$ の部分群 S に対して $\mathcal{E}^+(e) = S$ となる埋め込み e が存在するか?

[$H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ への作用に関して, 上記と同種の問題を川見将広氏 [29] が考察している.]

Problem 7.3. *Theorem 5.2* の条件をみたす 4 次元多様体 M にたいして, X を $H_2(M; \mathbb{Z})$ *characteristic* ではないと仮定する. この時, 十分大きな g に対して *flexible* な埋め込み $e : \Sigma_g \rightarrow M$ で $[e(\Sigma_g)] = X \in H_2(M; \mathbb{Z})$ となるものが存在するか?

Problem 7.4. 任意の単連結で微分可能な閉 4 次元多様体 M で S^4 と同相でないものに対し, 任意の閉曲面の *flexible* な埋め込みが存在するか?

[もしも $11/8$ 予想 [34] が正しければ, M は $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $S^2 \times S^2$, $K3$ 曲面や逆の向きが入った $K3$ 曲面の連結和と homeomorphic である (例えば, [41] の 247 ページを参照せよ).]

Problem 7.5. 単連結で微分可能な閉 4 次元多様体 M への閉曲面 S の埋め込み e について, もしも $\phi \in \mathcal{M}(S)$ が e -*extendable* であるならば $e \circ \phi$ は e と *isotopic* か?

[$M = S^4$ の場合は, Cerf [4] と同様の議論により, 肯定的に解決できることが, 佐伯修氏により指摘されている.]

参考文献

- [1] 阿原一志, 逆井卓也, 「パズルゲームで楽しむ写像類群入門」, 日本評論社.
- [2] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math Studies 82, Princeton Univ. Press 1975.
- [3] J.S. Birman and D. R. J. Chillingworth, On the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 71 (1972), 437–448. Erratum: Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 136 (2004), 441–441.
- [4] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics, No. 53 Springer-Verlag, Berlin-New York 1968.
- [5] D. R. J. Chillingworth, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 65 (1969), 409–430.
- [6] M. Dehn, Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math. 69 (1938), 135–206.
- [7] J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, (3-rd edn.), Ergebnisse der Math. u.i. Grundz. 5, Springer, 1971.
- [8] F. Ding, Y. Liu, S. Wang and J. Yao, Spin structures and codimension-two homeomorphism extensions, Math. Res. Lett. 19 (2012), 345–357.
- [9] M. Freedman and R. Kirby, A geometric proof of Rochlin’s theorem, Proc. Symp. Pure Math. 32 (1978), 85–97.
- [10] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [11] L. Guillou and A. Marin, Une extension d’un théorème de Rohlin sur la signature, C. R. Acad. Sc. Paris, t.285 (1977), Série A, 95–98.
- [12] J.A. Hillman and A. Kawachi, Unknotting orientable surfaces in the 4-sphere, J. Knot Theory Ramifications 4 (1995), 213–224.
- [13] S. Hirose, On diffeomorphisms over T^2 -knots, Proc. AMS, 119, (1993), 1009–1018.
- [14] S. Hirose, Diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the 4-sphere, Algebraic and Geometric Topology, 2, (2002), 791–824.

- [15] **S. Hirose**, Surfaces in the complex projective plane and their mapping class groups, *Algebraic and Geometric Topology*, 5, (2005), 577–613.
- [16] **S. Hirose**, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces embedded in the 4-sphere, *RIMS Kokyuroku* 1766 (2011), 81–90.
- [17] **S. Hirose**, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere, *Algebraic and Geometric Topology*, 12 (2012), 109–130.
- [18] **S. Hirose and M. Sato**, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, preprint (arXiv:1306.5382).
- [19] **S. Hirose and A. Yasuhara**, Surfaces in 4-manifolds and their mapping class groups, *Topology*, 47, (2008), 41–50.
- [20] **M.W. Hirsch**, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [21] **F. Hosokawa and A. Kawachi**, Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, *Osaka J. Math.* 16 (1979), 233–248.
- [22] **S.P. Humphries**, Generators for the mapping class group, In “Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)”, volume 722 of *Lecture Notes in Math.*, 44–47. Springer, Berlin, 1979.
- [23] **S.P. Humphries**, Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups, *Glasgow Math. J.* 34, (1992), no. 3, 313–317.
- [24] **N. Ivanov**, Mapping Class Groups, in *Handbook of Geometric Topology*, Ed. by R. Daverman and R. Sher. Elsevier, (2001), 523–633.
- [25] **Z. Iwase**, Dehn-surgery along a torus T^2 -knot, *Pacific J. Math.* 133 (1988), 289–299.
- [26] **Z. Iwase**, Dehn surgery along a torus T^2 -knot. II, *Japan. J. Math.* 16(1990), 171–196.
- [27] **D. Johnson**, The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for \mathcal{I} , *Ann. of Math.* (2) 118 (1983), 423–442.
- [28] **D. Johnson**, The structure of the Torelli group III: The abelianization of \mathcal{I} , *Topology* 24(1985), 127–144.
- [29] **M. Kawami**, On the spin-preserving symplectic groups modulo two, *Kobe J. Math.* 24 (2007), 53–66.
- [30] **W.B.R. Lickorish**, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. of Math.* (2) 76 (1962), 531–540.
- [31] **W.B.R. Lickorish**, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 59(1963), 307–317.
- [32] **W.B.R. Lickorish**, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 61(1965), 61–64.
- [33] **Y. Liu, Y. Ni, H. Sun and S. Wang**, On slope genera of knotted tori in 4-space, preprint (arXiv:1110.1921).
- [34] **Y. Matsumoto**, On the bounding genus of homology 3-spheres, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 29 (1982), no. 2, 287–318.
- [35] **Y. Matsumoto**, An elementary proof of Rochlin’s signature theorem and its extension by Guillou and Marin, in “*À la Recherche de la Topologie Perdue*”, *Progress in Math.*, 62(1986), 119–139.
- [36] **J.M. Montesinos**, On twins in the four-sphere I, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 34(1983), 171–199.
- [37] **R.A. Norman**, Dehn’s Lemma for Certain 4-Manifolds, *Invent. Math.*, 7(1969), 143–147.
- [38] **T. Nowik**, Immersions of non-orientable surfaces, *Topology and its Applications* 154(2007), 1881–1893.

- [39] **V.R. Rokhlin**, Proof of Gudkov's hypothesis, *Functional Analysis and its Applications*, 6(1972), 136–138.
- [40] **Y. Sato**, The reflexivity of 2-knots in $S^2 \times S^2$, *J. Knot Theory Ramifications*, 1 (1992), 21–29.
- [41] **A. Scorpan**, *The wild world of 4-manifolds*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [42] **S. Suzuki**, Local knots of 2-spheres in 4-manifolds, *Proc. Japan Acad.*, 45(1969), 34–38.
- [43] 鈴木晋一, 「曲面の線形トポロジー <上>, <下>」, 槇書店 (1987).
- [44] **B. Szepietowski**, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Geom. Dedicata* 160 (2012), 169–183.
- [45] **B. Szepietowski**, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Kodai Math. J.* 36 (2013), 1–14.
- [46] 田村一郎, 「微分位相幾何学 I」, 岩波書店 (1977).