

## 2次元ブレイドとチャート表示

鎌田 聖一 (阪市大理)\*

### 1. はじめに

2次元ブレイドはチャートと呼ばれる図式を用いて表すことができる。最初にチャート表示が導入されたのは1992年[5]で、任意の単純2次元ブレイドはチャート表示を持つこと、および、2つのチャートがある局所変形(チャート変形)で移り合うとき同値な単純2次元ブレイドを表すことが示された。その逆の主張「同値な単純2次元ブレイドを表す2つのチャートはチャート変形の列で移り合う」が証明されたのは1996年[11]である。その頃は2次元ブレイドが「単純」であることを仮定していた。1996年[10]に非単純な2次元ブレイドのモノドロミーが研究されたが、チャート表示を構成するには至らなかった。ところが、曲面結び目の研究に2次元ブレイドを使うときに非単純な場合も扱いたい状況が生じた。そのためにチャート表示の一般化の研究を行ってきた。2次元ブレイドとチャート表示については以前トポロジーシンポジウム[4, 9]で発表したが、その後の進展としてチャートの一般化の研究がまとまってきたので今回この機会に紹介したいと思う。講演ではこれまでの研究に関するサーベイ的な部分と最近松本堯生氏(京大数理研・広島大)と共同で研究している正則な2次元ブレイドのチャート表示に関するもの[19]を紹介する。2007年に発表したモノドロミーを表示する一般チャート理論[15]は[19]の基礎となっているが、話が発散しそうなので割愛する。2次元ブレイドの基本事項に関しては、ここでも少し述べるが、詳細は論説[14]と昨年出版された著書[17]の第10章を参照して頂きたい。この予稿集の原稿は主に[17]と[19]に沿って構成されている。

### 2. 2次元ブレイド

$D_1^2, D_2^2$ を2次元円板とし、直積空間 $D_1^2 \times D_2^2$ から各成分への射影を $\text{pr}_j : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_j^2$ と表す。 $m$ を自然数とし、 $X_m$ を $D_1^2$ の直線上に並んだ $m$ 個の異なる内点の集合とする。

**定義 2.1**  $D_1^2 \times D_2^2$ に埋め込まれた曲面 $S$ が次の条件をみたすとき、次数 $m$ の2次元ブレイド(または2次元 $m$ ブレイド)という。

(1) 射影 $\text{pr}_2 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$ を $S$ に制限した写像が被覆度 $m$ の分岐被覆写像である。

(2)  $S \cap \partial(D_1^2 \times D_2^2) = \partial S \cap D_1^2 \times D_2^2 = X_m \times \partial D_2^2$ である。

(1)の分岐被覆写像を $\pi_S : S \rightarrow D_2^2$ と表し、 $S$ が定める分岐被覆写像という。この分岐値全体を $\Sigma(S)$ と表す。

分岐被覆写像 $p : F \rightarrow D$ が単純であるとは、 $D$ の任意の分岐値 $y$ に対して、 $p^{-1}(y)$ に唯一の分岐点が存在し、そこでの $p$ の局所次数が2であるときをいう。(  $x \in F$ に対し、 $p$ が $x$ の近傍で $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \rightarrow z^d$ と書けるとき、 $d$ を $x$ における $p$ の局所次数という。)

**定義 2.2**  $S$ が定める分岐被覆写像 $\pi_S$ が単純のとき、2次元ブレイド $S$ を単純であるという。すなわち、任意の分岐値上に分岐点が唯一存在し、その局所次数が2であるような2次元ブレイドが単純2次元ブレイドである。

本研究は科研費(課題番号:21340015)の助成を受けたものである。

\* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科

**定義 2.3** 任意の分岐値上に分岐点が唯一存在するような2次元ブレイドを正則2次元ブレイドという<sup>1</sup>.

任意の分岐被覆写像は少し変形して単純分岐被覆写像にできることが知られているが、2次元ブレイドについては単純2次元ブレイドに変形できるとは限らない。(次数1と次数2の2次元ブレイドは定義から単純2次元ブレイドである。次数3の2次元ブレイドは単純2次元ブレイドに変形できる。次数が4以上のとき、単純2次元ブレイドに変形できない例がある [10].)

2次元ブレイドでは次の3種類の同値関係がよく使われる。

**定義 2.4** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同型であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2) 各  $s \in [0, 1]$  と  $y \in D_2^2$  に対して,  $h_s(D_1^2 \times \{y\}) = D_1^2 \times \{y\}$  が成り立つ。
- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

**定義 2.5** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同値であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2)  $D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で,

$$h_s(D_1^2 \times \{y\}) = D_1^2 \times \{h_s(y)\} \quad (s \in [0, 1], y \in D_2^2)$$

となるものが存在する。

- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

**定義 2.6** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  がブレイド全同位であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s(S)$  は2次元ブレイドである。
- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

明らかに, 同型  $\Rightarrow$  同値  $\Rightarrow$  ブレイド全同位という関係がある。

### 3. モーション・ピクチャーによる表示

$D_1^2 \times D_2^2 = (D^2 \times I) \times [0, 1]$  と見なす。最後の成分  $[0, 1]$  を時間方向と見なして2次元  $m$  ブレイド  $S$  のモーション・ピクチャーを考える。各  $t \in [0, 1]$  に対して,  $t$  での  $S$  の切り口 (切断面) を  $b_t$  とおく。すなわち,  $S \cap D^2 \times I \times \{t\} = b_t \times \{t\}$  である。1パラメータ族  $\{b_t\}$  を  $S$  のモーション・ピクチャーという。

**命題 3.1**  $m$  ブレイドまたは特異  $m$  ブレイドからなる1パラメータ族  $\{b_t\}_{t \in [0,1]}$  が, 2次元  $m$  ブレイドのモーション・ピクチャーとなる必要十分条件は次である。

<sup>1</sup> 2次元ブレイドが定める分岐被覆写像が「正則」であることではない。

- (1)  $(D^2 \times I) \times [0, 1] \cong D^4$  内の図形  $\bigcup_{t \in [0, 1]} b_t \times \{t\}$  がプロパーかつ局所平坦に埋め込まれた曲面である.
- (2)  $b_0$  と  $b_1$  は自明  $m$  ブレイド  $X_m \times I$  である.

**例 3.2**  $S = X_m \times D_2^2$  を自明な 2次元ブレイドという. このモーション・ピクチャー  $\{b_t\}$  は, 各  $b_t$  が自明  $m$  ブレイドである (図1).

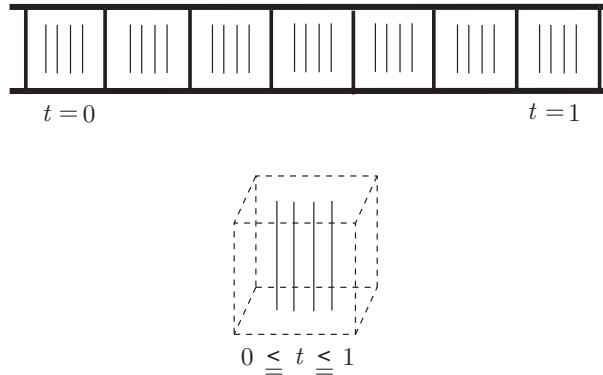


図 1: 自明な 2次元ブレイドのモーション・ピクチャー

**例 3.3** 図2は次数3の単純 2次元ブレイドのモーション・ピクチャーである. 特異ブレイドとしての特異点が  $t = 1/3$  に 2個,  $t = 2/3$  に 2個ある. これらの特異点は 2次元ブレイドの分岐点に対応し, 局所次数は 2である.

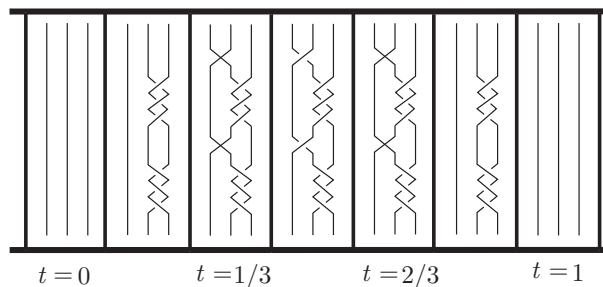


図 2: スパン 3 葉結び目を表す単純 2次元 3 ブレイドのモーション・ピクチャー

#### 4. 曲面結び目との関係

古典次元では次の定理が成り立つ.

**定理 4.1 (アレクサンダーの定理・マルコフの定理)**

- (1) 任意の有向絡み目は, あるブレイドの閉包として表すことができる.
- (2) 2つのブレイドが同値な有向絡み目を表す必要十分条件は, それらがブレイドの同値変形, 共役変形, 安定化変形, および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである.

この類似が 2次元の場合にも成り立つことが [7, 8, 13] で証明されている.

### 定理 4.2

- (1) 任意の有向曲面絡み目は、ある2次元ブレイドの閉包として表すことができる。
- (2) 2つの2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表す必要十分条件は、それらが2次元ブレイドのブレイド全同位、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである。

前半の主張は Oleg Viro 氏によって提唱されたものである。この主張は「任意の有向曲面絡み目は、ある単純2次元ブレイドの閉包として表すことができる」としてもよい [8]。2つの単純2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表すとき、それらはブレイド全同位、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うが、途中で現れる2次元ブレイドは単純であるとは限らない。

**予想 4.3 ([12])** 2つの単純2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表す必要十分条件は、それらが単純2次元ブレイドの同値変形、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである。

古典次元と同様に有向曲面絡み目のブレイド指数も定義される。ブレイド指数1は自明な  $S^2$ -結び目、ブレイド指数2は自明な種数が正の曲面結び目または自明な2成分  $S^2$ -絡み目に限られる。ブレイド指数3はリボン型である [5]。例えば、スパン3葉結び目は図2のようなブレイドの閉包に同値であり、そのブレイド指数は3である。有向曲面絡み目のブレイド指数は加法的ではない [20]。

## 5. モノドロミーによる表示

2次元ブレイドはモノドロミーによって表すことができる。  $y_0$  を  $\partial D_2^2$  の一点として固定する。

$S$  を2次元  $m$  ブレイドとし、  $D_2^2$  の各点  $y$  に対して、  $D_1^2$  の部分集合  $S_y$  を  $S \cap D_1^2 \times \{y\} = S_y \times \{y\}$  で定める。  $S_y = \text{pr}_1(S \cap \text{pr}_2^{-1}(y))$  である。連続写像  $\alpha : [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus \Sigma(S)$  は、配置空間への連続写像  $[0, 1] \rightarrow C_m, t \mapsto S_{\alpha(t)}$  を導く。これによって、準同型

$$\rho_S : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0) \rightarrow \pi_1(C_m, X_m) = B_m$$

が得られる。これを  $S$  のモノドロミー準同型という。

$\Sigma, \Sigma'$  をそれぞれ  $D_2^2$  の  $n$  個の内点からなる集合とする。2つの準同型  $\rho : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0) \rightarrow B_m$  と  $\rho' : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma', y_0) \rightarrow B_m$  が同値であるとは、同相写像  $h : (D_2^2, \Sigma) \rightarrow (D_2^2, \Sigma')$  で、  $h|_{\partial D_2^2} = \text{id}$  かつ  $\rho = \rho' \circ h_*$  となるものが存在するときをいう。

### 定理 5.1 ([10])

- (1) 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同型である必要十分条件は  $\rho_S = \rho_{S'}$  である。
- (2) 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同値である必要十分条件は  $\rho_S$  と  $\rho_{S'}$  が同値となることである。

2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  がブレイド全同位である条件をモノドロミー準同型の言葉で表現することは容易ではない [10]。 [10] ではその必要条件を使って、次数が4以上のとき、単純2次元ブレイドに変形できない（ブレイド全同位やブレイド同位とならない）非単純な2次元ブレイドの存在が示されている。

モノドロミー準同型はブレイドシステム (Hurwitzシステムともいう) を用いて記述できる.  $\Sigma$  を  $D_2^2$  の  $n$  個の内点からなる集合とする. 次の条件を満たす  $D_2^2$  内の  $n$  個の単純道  $a_i : [0, 1] \rightarrow D_2^2$  の組  $A = (a_1, \dots, a_n)$  を  $\Sigma$  を始点集合とする Hurwitz の弧システムという.

- (1) 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $a_i(0) \in \Sigma$ ,  $a_i(1) = y_0$  かつ  $a_i((0, 1)) \cap \Sigma = \emptyset$  である.
- (2)  $a_i$  と  $a_j$  の交わりは終点  $y_0$  のみである.
- (3)  $y_0$  のまわりで (反時計回りに進むとき)  $a_1, \dots, a_n$  はこの順番に現れる.

各  $a_i$  に対して,  $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus \Sigma$  を次のような道とする.  $y_0$  から  $a_i^{-1}$  に沿って  $a_i$  の始点  $a_i(0)$  の近くまで進み,  $a_i(0)$  の回りを反時計回りに1周して,  $a_i$  に沿って  $y_0$  へ戻る.  $\alpha_i$  が代表する  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の元を  $\eta_i$  とするとき,  $n$  組  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  を  $A$  に付随する  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の Hurwitz 生成系という.

準同型写像  $\rho : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0) \rightarrow B_m$  は生成系での値で決まるので,  $A$  と  $(\rho(\eta_1), \dots, \rho(\eta_n))$  を与えれば  $\rho$  が定まる.

$S$  を2次元ブレイドとし,  $A$  を  $\Sigma(S)$  を始点集合とする Hurwitz の弧システムとする. この  $A$  から  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の Hurwitz 生成系  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  を定めるとき,  $(\rho_S(\eta_1), \dots, \rho_S(\eta_n))$  を  $A$  に付随する  $S$  のブレイドシステム (あるいは Hurwitz システム) という.

群  $G$  の  $n$  個の直積  $G^n = G \times \dots \times G$  上で写像  $\varphi_i : G^n \rightarrow G^n$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) を

$$\varphi_i(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, \dots, g_n)$$

と定める. ( $\varphi_i$  の逆写像は  $\varphi_i^{-1}(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$  で与えられる.) これら  $\varphi_i$  およびその逆写像  $\varphi_i^{-1}$  を初等変形という.  $G^n$  の2つの元が有限回の初等変形で移り合うとき, それらは Hurwitz 同値であるという.

**定理 5.2 ([10])**  $S$  と  $S'$  を2次元ブレイドとし,  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $S$  のブレイドシステム,  $(b'_1, \dots, b'_{n'})$  を  $S'$  のブレイドシステムとする.  $S$  と  $S'$  が同値であるための必要十分条件は,  $n = n'$  かつ  $(b_1, \dots, b_n)$  と  $(b'_1, \dots, b'_{n'})$  が Hurwitz 同値となることである.

ブレイド群  $B_m$  の3つの部分集合  $A_m$ ,  $A_m^{\text{regular}}$ ,  $A_m^{\text{simple}}$  を定義する.

$m$  ブレイド  $b$  が  $A_m$  に属するのは,  $b$  が  $B_m$  において次のようなブレイド  $b'$  に共役となるときである:  $c$  を  $b$  の閉包  $\hat{b}$  の連結成分数とする.  $b' = b_1 \amalg b_2 \amalg \dots \amalg b_c$  はある  $m_k$  ブレイド  $b_k$  ( $k = 1, \dots, c$ ) の分離和であり, 各  $b_k$  の閉包は自明結び目に同値であり,  $m \neq c$  である.

ここで  $b'$  が分離和  $b_1 \amalg b_2 \amalg \dots \amalg b_c$  であるとは,  $D^2 \times I$  内の互いに交わらない円柱  $N_1 \times I, \dots, N_c \times I$  の和集合に  $b'$  が含まれ,  $b' \cap N_i \times I = b_i$  になるときをいう.

$A_m$  の定義において,  $b_1$  の次数が2以上であり,  $i > 1$  のとき,  $b_i$  の次数が1であるという条件を付けた  $m$  ブレイド  $b$  全体を  $A_m^{\text{regular}}$  と定義する.

また,  $A_m$  の定義において,  $b_1$  の次数が2であり,  $i > 1$  のとき,  $b_i$  の次数が1であるという条件を付けた  $m$  ブレイド  $b$  全体を  $A_m^{\text{simple}}$  と定義する. 言い換えれば,  $B_m$  の標準的生成元を  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  とするとき,  $\sigma_1$  または  $\sigma_1^{-1}$  の  $B_m$  における共役元全体が  $A_m^{\text{simple}}$  に他ならない. ( $A_m^{\text{simple}}$  は  $SA_m$  と表される [17].) 定義より,  $A_m \supset A_m^{\text{regular}} \supset A_m^{\text{simple}}$  である.

**定理 5.3**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

**定理 5.4**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が正則2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m^{\text{regular}}$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

**定理 5.5**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が単純2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m^{\text{simple}}$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

## 6. チャート表示

2次元  $m$  ブレイド  $S$  のモノドロミー準同型  $\rho_S: \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0) \rightarrow B_m$  をチャートと呼ばれる  $D_2^2$  内の図式を用いて表す方法を紹介する.

$\Gamma$  を  $D_2^2$  の内部にある有限グラフで, 各辺には向きと  $\{1, 2, \dots, m-1\}$  に値を持つラベルが与えられているとする. 頂点の無い単純閉曲線も  $\Gamma$  の辺とみなす.  $V(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の頂点集合とする.

$\Gamma$  と横断的に交わる道  $\alpha: [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus V(\Gamma)$  を考える.  $\alpha$  と  $\Gamma$  の交差に対して, 交差の符号を次のように定める.  $\alpha$  の進行方向に向かって右から左に  $\Gamma$  の辺が横切るとき, 正の交差と呼び, その符号を  $+1$  とする. 左から右に横切るとき, 負の交差と呼び, その符号を  $-1$  とする.  $\alpha$  に沿って進むときに  $s$  番目に現れる  $\Gamma$  との交差の符号を  $\epsilon_s$  とし, そこで交差している  $\Gamma$  の辺のラベルを  $i_s$  とするとき, ブレイド群の標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  からなる語

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_q}^{\epsilon_q}$$

が得られる. (ここで  $q$  は交差の回数である.) これを  $\Gamma$  に対する  $\alpha$  の交差語と呼び,  $w_\Gamma(\alpha)$  と表す.

**定義 6.1**  $\Gamma$  が次を満たすとき,  $\Gamma$  を一般  $m$  チャートという.

- $\Gamma$  の各頂点  $v$  に対して,  $v$  の回りを反時計回りにまわる小さなループをとり,  $\Gamma$  との交差語を  $w_v$  とする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.
  - (a)  $w_v$  が表す  $B_m$  の元  $[w_v]$  は  $A_m$  に属す.
  - (b) 語として  $w_v = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j$  である. ここで,  $i, j$  は  $|i - j| > 1$  を満たすものとする. (ループの起点は適当に取り直してよい.)
  - (c) 語として  $w_v = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j \sigma_i \sigma_j$  である. ここで,  $i, j$  は  $|i - j| = 1$  を満たすものとする. (ループの起点は適当に取り直してよい.)

更に, 条件 (a) において,  $A_m$  を  $A_m^{\text{regular}}$  としたとき,  $\Gamma$  を一般正則  $m$  チャートといい, 条件 (a) において,  $A_m$  を  $A_m^{\text{simple}}$  としたとき,  $\Gamma$  を一般単純  $m$  チャートという.

条件 (a) を満たす頂点を黒頂点 (black vertex), 条件 (b) を満たす頂点を交差 (crossing), 条件 (c) を満たす頂点を白頂点 (white vertex) という.

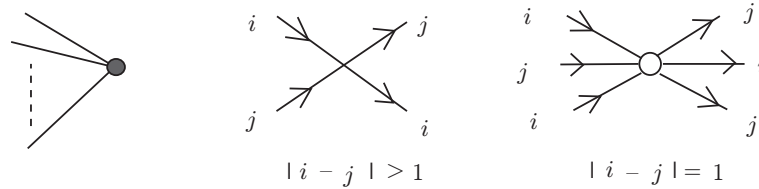


図 3: チャートの頂点：黒頂点，交差点，白頂点

一般  $m$  チャート  $\Gamma$  に対して，黒頂点の集合を  $\Sigma(\Gamma)$  と書くことにする。

$\Gamma$  に対して，準同型写像  $\rho_\Gamma : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(\Gamma), y_0) \rightarrow B_m$  を  $[\alpha] \in \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(\Gamma), y_0)$  に対して， $\alpha$  を  $\Gamma$  に横断的に交わるようにとり， $\Gamma$  に対する交差語  $w_\Gamma(\alpha)$  が表す  $B_m$  の元を対応させる写像として定義する．これを  $\Gamma$  のモノドロミー準同型という。

**定理 6.2** 一般  $m$  チャート  $\Gamma$  に対して，2次元  $m$  ブレイド  $S$  で  $\rho_\Gamma = \rho_S$  となるものが存在する．逆に，2次元  $m$  ブレイド  $S$  に対して一般  $m$  チャート  $\Gamma$  で  $\rho_\Gamma = \rho_S$  となるものが存在する．

このとき， $\Gamma$  を2次元ブレイド  $S$  のチャート表示という。

**定理 6.3**  $\Gamma$  を2次元ブレイド  $S$  のチャート表示とする．

- (1)  $\Gamma$  が一般正則チャートであることと  $S$  が正則2次元ブレイドであることは同値である．
- (2)  $\Gamma$  が一般単純チャートであることと  $S$  が単純2次元ブレイドであることは同値である．

ここで述べた2次元ブレイド，正則2次元ブレイド，単純2次元ブレイドを表す一般チャート，一般正則チャート，一般単純チャートは，モノドロミーのチャート表示に関する一般論 [15] から得られる．(というより，[15] で展開されている議論は2次元ブレイドのチャート表示のアイデアを一般化したものである．) [15] では，2つのチャートが同値な2次元ブレイドを表すための基本変形 (W型チャート変形とB型チャート変形) が与えられている．

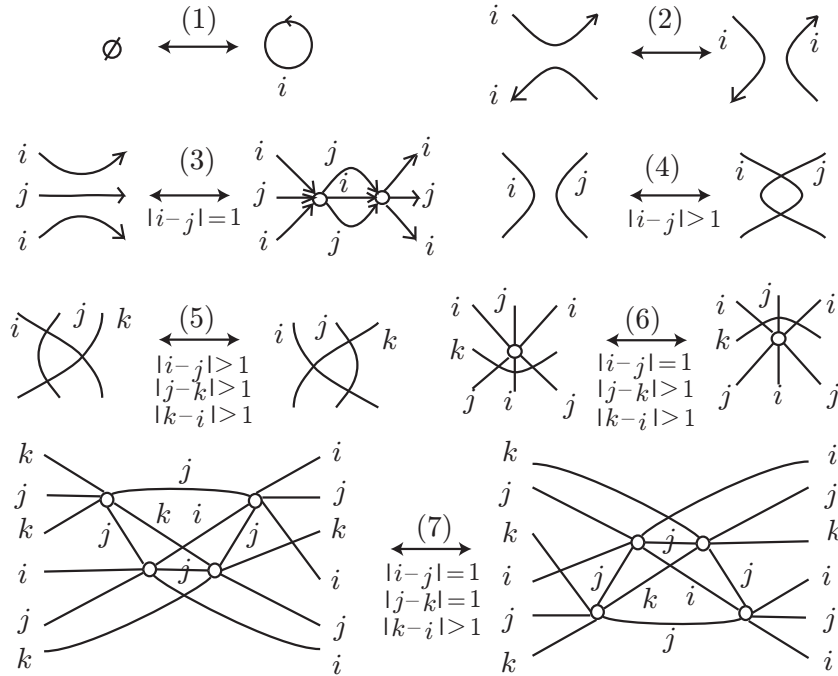


図 4: W型チャート変形

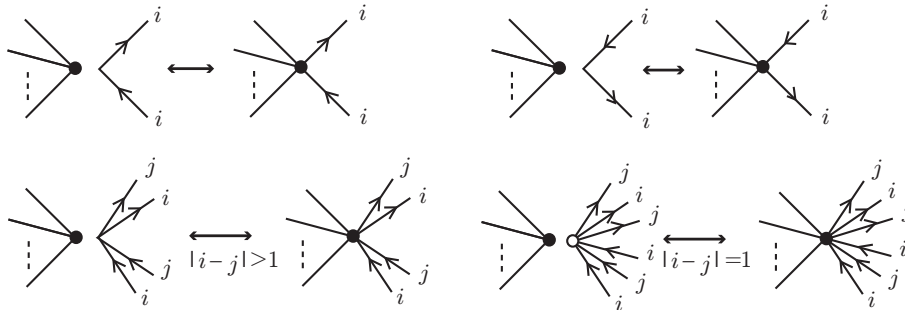


図 5: B型チャート変形

## 7. 正則チャート

正則2次元ブレイドは一般正則チャート表示を持つが、もう少し都合のよいチャート表示を考えたい。

$b \in A_m^{\text{regular}}$  とする。定義より、 $b$  は  $b' = b_1 \amalg b_2 \amalg \cdots \amalg b_c$  に共役であり、 $b_1$  は次数が2以上のブレイドでその閉包が自明な結び目に同値であり、 $i > 1$  については  $b_i$  は次数1のブレイドである。 $b_1$  の次数を  $b$  の特異次数と呼ぶ。 $d^*(b)$  と表すことにする。定義から  $d^*(b) + c - 1 = m$  である。

特に、 $b \in A_m^{\text{regular}}$  となるのは  $d^*(b) = 2$  のときである。

ブレイド群の標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  からなる語  $w = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_q}^{\epsilon_q}$  が  $[w] \in A_m^{\text{regular}}$  のとき、そこに現れる生成元がなす集合  $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_q}\}$  の濃度は  $d^*(b) - 1$  以上である。ちょうど  $d^*(b) - 1$  のとき、 $w$  はレンジ既約であるという。(しかも、レンジ既約なら  $\sigma_s, \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_t$  のように添字は連続している。)

**定義 7.1**  $\Gamma$  が次を満たすとき、 $\Gamma$  を正則  $m$  チャートという。

- $\Gamma$ の各頂点 $v$ に対して、 $v$ の回りを反時計回りにまわる小さなループをとり、 $\Gamma$ との交差語を $w_v$ とする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

- (a)  $[w_v] \in A_m^{\text{regular}}$ であり、 $w_v$ はレンジ既約である。
- (b) 語として $w_v = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i\sigma_j$ である。ここで、 $i, j$ は $|i - j| > 1$ を満たすものとする。(ループの起点は適当に取り直してよい。)
- (c) 語として $w_v = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i\sigma_j$ である。ここで、 $i, j$ は $|i - j| = 1$ を満たすものとする。(ループの起点は適当に取り直してよい。)

任意の正則2次元 $m$ ブレイドは、正則 $m$ チャート表示を持つ。また、そのような2つのチャートはW型チャート変形とB型チャート変形を有限回施すことで移り合う。その途中に現れるチャートは一般正則チャートであるが、正則チャートであるとは限らない。そこで正則性を保つ変形を導入する。

$\Gamma$ を正則チャートとし、 $v$ を黒頂点とする。 $v$ に接続しているすべての辺に付いているラベルの集合を $\text{Label}_\Gamma(y)$ とする。 $w_v$ がレンジ既約なので、 $\text{Label}_\Gamma(y)$ は連続した整数 $\{s, s + 1, \dots, t\}$ の形をしている。ただし、 $t - s + 1 = d^*(b) - 1$ である。今、 $w_v = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_n}^{\epsilon_n}$ とすると、 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{s, s + 1, \dots, t\}$ である。図6に示す4つの局所変形は、このラベル集合を $+1$ または $-1$ だけシフトし、正則チャートを正則チャートに移す。これらをラベルシフト変形という。ただし、(A)の四角の中は、図7のようなチャートの部品を積み重ねて構成する。他も同様とする。

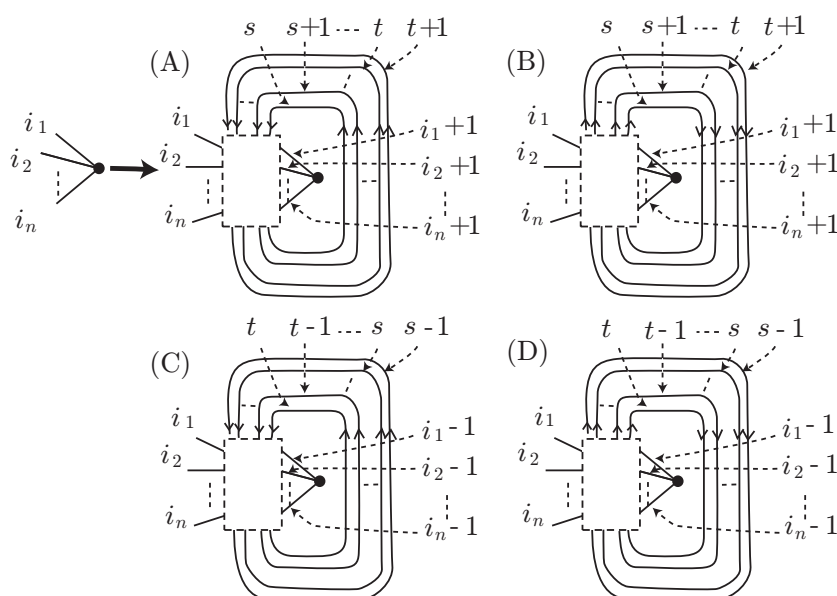


図6: ラベルシフト変形

図8と図9はラベルシフト変形の例である。

図10は通過変形という局所変形である。ここで $j$ は $|i_k - j| > 1$  ( $k = 1, \dots, n$ )を満たすラベルである。

**定理 7.2** 2つの正則チャートが同値な正則2次元ブレイドを表すための必要十分条件は、それらを結ぶ正則チャートの列で、その間が $D_2^2$ の全同位、W型チャート変形、正

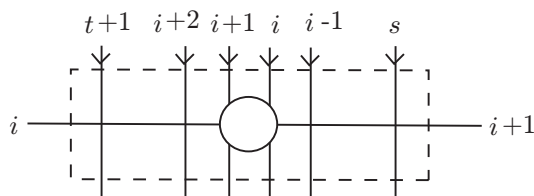


図 7: ラベルシフト変形を構成する部品

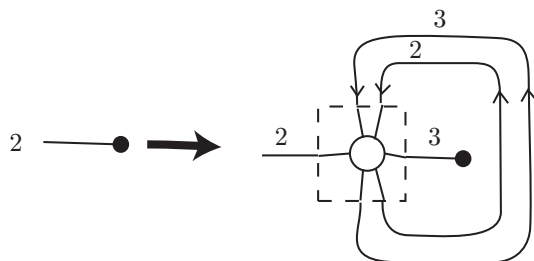


図 8: ラベルシフト変形の例

則性を保つ B 型チャート変形, ラベルシフト変形, 通過変形となるものが存在することである.

正則チャートのさらに特殊なケースが単純チャートである. 単純チャートとはすべての黒頂点には辺が 1 つだけ接続しているチャートのことであり, 単純 2 次元ブレイド表す図式として最初に導入されたチャートである. [11] で次の定理が示されている: 2 つの単純チャートが同値な単純 2 次元ブレイドを表すための必要十分条件は, それらを結ぶ単純チャートの列で, その間が  $D_2^2$  の全同位, CI 変形, CII 変形, CIII 変形となるものが存在することである. CI 変形は W 型チャート変形であり, CII 変形は通過変形, CIII 変形はラベルシフト変形である.

## 8. 最後に

単純チャート  $\Gamma$  が 2 次元ブレイド  $S$  を表すとき,  $S$  の 3 次元空間への射影図 (ダイアグラム) の特異点の集合と  $\Gamma$  は一致する [6, 17].  $\Gamma$  の辺は射影図の 2 重曲線に対応し, 黒頂点が (初等的) 分岐点, 白頂点が 3 重点に対応する. 正則チャートも同様のことが成り立つ. この場合, 黒頂点は (初等的とは限らない) 分岐点に 1 対 1 に対応する. また, 黒頂点に集まる辺はすべて, 分岐点に集まる 2 重曲線に対応する. このようにダイアグラムとの自然な対応が一般単純チャート, 一般正則チャート, 一般チャートではうまくいかない.

チャート表示は Lefschetz fibration や broken Lefschetz fibration のモノドロミーなどにも利用されている ([1, 3, 16, 18] など). モノドロミーを用いて表されるオブジェクトであれば, 一般チャート理論 [15] が利用できる. しかし, 2 次元ブレイドのチャートと射影図の関係に見られるような幾何的な意味付けが得られるかどうかは別の問題であり, 個々の対象について調べる必要がある. 今後の研究課題である.

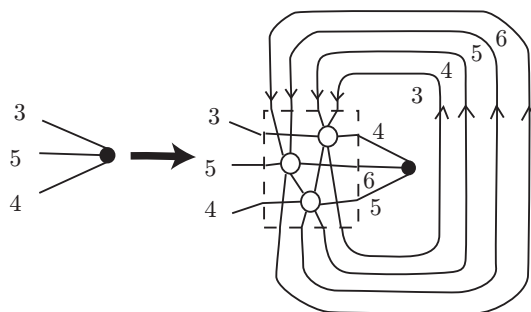


図 9: ラベルシフト変形の例

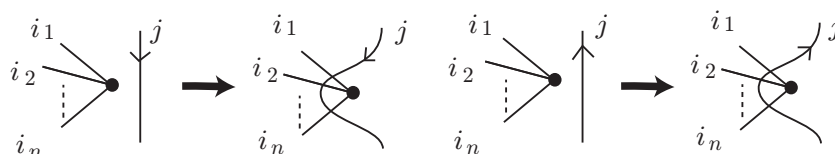


図 10: 通過変形

## 参考文献

- [1] R. Inanc Baykur and Seiichi Kamada, *Classification of broken Lefschetz vibrations with small fiber genera*, preprint, arXiv:1010.5814.
- [2] Scott Carter, Seiichi Kamada and Masahico Saito, *Surfaces in 4-Space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 142, Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [3] Hisaaki Endo and Seiichi Kamada, *Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization*, preprint, arXiv:1306.2707.
- [4] 鎌田聖一, 2次元ブレイドについて, 第38回トポロジーシンポジウム (熊本大学, 1991年7月).
- [5] Seiichi Kamada, *Surfaces in  $R^4$  of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), no. 2, 137–160.
- [6] Seiichi Kamada, *2-dimensional braids and chart descriptions*, in “Topics in Knot Theory” (Erzurum/Turkey 1992), NATO ASI Series C, 399, Kluwer Academic Publisher, 1993, 277–287.
- [7] Seiichi Kamada, *Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four*, Bull. Amer. Math. Soc. 31 (1994), no. 1, 64–67.
- [8] Seiichi Kamada, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, Topology 33 (1994), no. 1, 113–122.
- [9] 鎌田聖一, *Survey on 2-dimensional braids*, 第41回トポロジーシンポジウム (愛媛大学, 1994年7月), 講演集 (1994), 162–178.
- [10] Seiichi Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), no. 2, 237–245.
- [11] Seiichi Kamada, *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications 4 (1996), no. 4, 517–529.
- [12] Seiichi Kamada, *Arrangement of Markov moves for 2-dimensional braids*, Contemp. Math. 233 (1999), 197–213.

- [13] Seiichi Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [14] 鎌田聖一, 2次元ブレイドと4次元の結び目理論, 「数学」57巻4号, pp. 383–399, 2005年10月(秋季号), 日本数学会; English Translation: S. Kamada, *Two-dimensional braids and four-dimensional theory of knots*, Sugaku Expositions 25 (2012), no. 1, 1–18.
- [15] Seiichi Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl. 154 (2007), no. 7, 1430–1446.
- [16] Seiichi Kamada, *Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization*, Topology Appl. 159 (2012), no. 4, 1041–1051.
- [17] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ 第16巻, 丸善出版株式会社, 2012年.
- [18] Seiichi Kamada, Yukio Matsumoto, Takao Matumoto, Keita Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, J. Math. Soc. Japan 57 (2005) no. 2, 537–555.
- [19] Seiichi Kamada and Takao Matumoto, *Chart descriptions of regular braided surfaces which are not necessarily simple or embedded*, preprint.
- [20] Seiichi Kamada, Shin Satoh, Manabu Takabayashi, *The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 12, 5425–5439.