

Covering map theory for graphs

松下 尚弘 (東京大学)*

1. はじめに

グラフとは集合 V と, $V \times V$ の部分集合 E で, 「任意の $(x, y) \in V \times V$ に対し, $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$ 」を満たすものの組 (V, E) のことをいう. したがって本講演におけるグラフとは, 非有向で, ループはあってもよいが, 二つの頂点の間にある線分は多くても一つであるようなものをいう. グラフ $G = (V, E)$ に対し, V を $V(G)$ と書いて G の頂点集合といい, E を $E(G)$ と書く. グラフ G, H に対し, G から H へのグラフの写像とは, 頂点集合の間の写像 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ であって, $(f \times f)(E(G)) \subset E(H)$ なるもののことである.

以下の問題はグラフ理論において古典的に考えられてきた問題である.

問題 1.1. 二つのグラフ G, H が与えられたとき, G から H へのグラフの写像が存在するかどうか調べよ.

本講演では, まず問題 1.1 に対するトポロジーの応用についての今までの研究を紹介し, そのあと講演者のプレプリント [13], [14], [15] の概要を述べる.

2. 抽象単体複体

本講演で現れる位相空間のほとんどは, 抽象単体複体の幾何学的実現として得られる. そこで本節において抽象単体複体の定義と知られていることを, 本講演に必要な範囲で一通り述べる. 詳しくは, [9]などを参照していただきたい.

抽象単体複体 (以下, 単体複体) とは, 集合 V と, V の有限部分集合の族 Δ で, 「任意の $\sigma \in \Delta$ と $\tau \in 2^V$ に対し, $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ である」および「各 $v \in V$ に対し, $\{v\} \in \Delta$ 」という性質を満たすものの組 (V, Δ) である. V を (V, Δ) の頂点集合といい, Δ の元を単体という. しばしば V を略して「 Δ は単体複体」などという. この表記において, 単体複体 Δ の頂点集合は $V(\Delta)$ と表す.

Δ_1 と Δ_2 を単体複体とする. Δ_1 から Δ_2 への単体写像とは, 頂点集合の間の写像 $f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2)$ であって, 各 $\sigma \in \Delta_1$ に対し, $f(\sigma) \in \Delta_2$ が成り立つもののことである.

集合 V に対し, $\mathbb{R}^{(V)}$ によって, V で生成される自由 \mathbb{R} -加群を表すものとする. $\mathbb{R}^{(V)}$ の有限部分 \mathbb{R} -加群全体による順極限の位相を入れて, $\mathbb{R}^{(V)}$ を位相空間とみなす. 単体複体 Δ と Δ の単体 σ に対し, Δ_σ によって, $\{\sum_{v \in \sigma} a_v v \in \mathbb{R}^{(V)} \mid a_v \geq 0, v \in \sigma, \sum_{v \in \sigma} a_v = 1\}$ なる $\mathbb{R}^{(V(\Delta))}$ の部分位相空間を表す. Δ の幾何学的実現とは, $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \Delta_\sigma$ なる $\mathbb{R}^{(V(\Delta))}$ の部分位相空間のことである. Δ の幾何学的実現を $|\Delta|$ で表す. 単体写像 $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ に対し, f の定義する $\mathbb{R}^{(V(\Delta_1))} \rightarrow \mathbb{R}^{(V(\Delta_2))}$ を制限することで, 連続写像 $|f|: |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$ が定義できる.

半順序集合のことをポセットということが多い. ポセット P の部分集合 c が P のチェインであるとは, 各 $x, y \in c$ に対し, $x \leq y$ または $x \geq y$ が成り立つことをいう. ポセッ

本研究は科研費 (課題番号:254699) の助成を受けたものである.

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: tmatsu@ms.u-tokyo.ac.jp

ト P に対し、頂点集合を P とし、単体集合を P の有限チェイン全体の集合とする単体複体を $\Delta(P)$ で表し、 P の順序複体という。 $|\Delta(P)|$ のことを単に $|P|$ で表す。

単体複体 Δ に対し、 $\Delta \setminus \{\emptyset\}$ に包含関係によって順序を入れたものを Δ の面ポセットといい、 $F(\Delta)$ で表す。このとき単体複体 Δ に対し、 $|F(\Delta)|$ は $|\Delta|$ に自然に同相になることが知られている。

本講演では位相空間に対する用語を、幾何学的実現を通して（抽象）単体複体やポセットに対して流用することにする。例えば、「単体写像 $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ がホモトピー同値である」は「 f の幾何学的実現 $|f|: |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$ がホモトピー同値写像である」ということを意味する、などである。

3. Lovász の近傍複体と Kneser 予想

トポロジーにおける問題 1.1 に対する応用は、主に以下に述べるグラフの彩色問題に対して行われてきた。

非負整数 n に対し、 n 頂点完備グラフ K_n を $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$, $E(K_n) = \{(x, y) \in V(K_n)^2 \mid x \neq y\}$ により定義する。グラフ G に対し、 $\inf\{n \geq 0 \mid G \text{ から } K_n \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$ を G の彩色数といい、 G の彩色数を $\chi(G)$ で表す。 $\chi(G)$ を決定することを、グラフの彩色問題 (graph coloring problem) といい、古典的に組合せ論において考えられてきた問題である。彩色問題という言葉の由来は、彩色数が古典的には以下のような表現を用いて定義されたからである：「線分の両端の色は異なるように、グラフ G の全ての頂点に色を与えるとき、最低限必要な色の個数を彩色数という」

グラフの彩色問題にトポロジーを初めて応用したのは Lovász である。Lovász は [10] において、以下に述べる近傍複体という単体複体を定義し、そのホモトピー不変量と彩色数との関係性を導き出し、Kneser グラフというグラフの彩色数を決定した。

定義 3.1. グラフ G と、 G の頂点 v に対し、 $N(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$ と定義する。グラフ G の近傍複体 $\mathcal{N}(G)$ を、頂点集合を $\{v \in V(G) \mid N(v) \neq \emptyset\}$ とし、単体集合を

$\mathcal{N}(G) = \{\sigma \subset V(G) \mid \#\sigma < +\infty \text{ で、 } G \text{ の頂点 } v \text{ で } \sigma \subset N(v) \text{ なるものが存在する}\}$
なる（抽象）単体複体と定義する。

Lovász は以下の定理を示した。

定理 3.2. (Lovász [10]) G をグラフとし、 n を (-1) 以上の定数とする。このとき、 $\mathcal{N}(G)$ が n -連結¹ ならば、 $\chi(G) \geq n + 3$ である。

Lovász の定理の証明の方法は、 $\mathcal{N}(G)$ とホモトピー同値な \mathbb{Z}_2 -複体 $\mathcal{L}(G)$ (Lovász 複体) を構成し、 G から K_m へのグラフの写像が存在するならば、 $\mathcal{L}(G)$ が対合点を含まない m 個の部分複体で被覆されることを示し、Borsuk-Ulam の定理の一つの定式化² に帰着させることである。

Kneser グラフとは、正の整数 n, k で、 $n \geq 2k$ なるものに対し、 $V(K_{n,k}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \#\sigma = k\}$, $E(K_{n,k}) = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$ で定義されるグラフである。Kneser は [8] において Kneser グラフを定義し、 $\chi(K_{n,k}) \leq n - 2k + 2$ を示し、 $\chi(K_{n,k}) = n - 2k + 2$

¹ (-1) -連結は「空でない」ことを意味するものとする。

² S^n を $(n+1)$ 個の閉集合で被覆するならば、そのうちの一つの閉集合はある対合点のペアを含む、というものである。

と予想した (Kneser 予想). Lovász は $\mathcal{N}(K_{n,k})$ が $(n-2k-1)$ -連結であることを示し, 定理 3.2 を用いて Kneser 予想を解決した. Kneser 予想に関しては, Bárány が [1] で, Greene が [7] で Borsuk-Ulam の定理を用いた別証を与えており, 完全に組合せ論的な証明は Matoušek が [12] において与えている.

近傍複体の他に, グラフの彩色問題への応用が考えられている単体複体, ポセットとして, 箱複体や Hom 複体などがある. これらに関しては, [2], [5], [9], [11], [17], [18]などを参照していただきたい. 本研究とはそれほど関係がないので詳しくは述べないが, 定理 3.2 とよく似た以下の結果を述べておく. ここで, Hom 複体とは二つのグラフ G, H に対して定まるポセット³ $\text{Hom}(G, H)$ であり, グラフ C_{2r+1} は $(2r+1)$ -サイクルグラフ (例 5.1.(2) 参照) である.

定理 3.3. (Babson-Kozlov [3]) G をグラフ, n を (-1) 以上の整数, r を正の整数とする. このとき, $\text{Hom}(C_{2r+1}, G)$ が n -連結ならば, $\chi(G) \geq n+4$ である.

Hom 複体は Lovász により定義され, 上の定理も Lovász により予想された. この定理には現在, 様々な証明が与えられているが, [17] で与えられているものが簡単である. 現在はこの定理には簡単な証明が与えられているが, この予想の解決を契機にして, 2000 年代に入って彩色問題へのトポロジーの応用に関する研究, 特に Hom 複体に関する研究が盛んに行われるようになった.

4. 本研究の概要

講演者の行った研究 [13], [14], [15] の概要について述べる. 講演者は正の整数 r に対し, r -被覆写像, および r -基本群なる概念を定義した. r -被覆写像はグラフの写像の一つのクラスであり, r -基本群は基点付きグラフに対し構成される群である. r -被覆写像と r -基本群との間には, トポロジーにおける被覆写像と基本群との関係と類似の関係がみられることを示した. その一つは, r -基本群の部分群に対し, 定義域が連結で基点付きの r -被覆写像が対応することを示した定理 5.5 である. そして, r -基本群が問題 1.1 を考える上で, グラフの写像の非存在性を示すことに応用できることを示した.

そして正の整数 r に対し, Lovász の近傍複体の自然な一般化である r -近傍複体なる単体複体を定義した. 1 -近傍複体が近傍複体である. 講演者は r -近傍複体の基本群が $(2r)$ -基本群の群にほぼ同型になることを示した. (定理 7.1) また, r が奇数の場合には r -近傍複体は, 近傍複体の場合と同じようにして \mathbb{Z}_2 -同変写像の有無に帰着させることでグラフの写像の非存在性を導くことができることを示した.

5. r -基本群と r -被覆写像

以降, 正の整数 r を固定する. 本節では r -被覆写像と r -基本群の定義を与え, その基本的な性質について述べる. 最後に r -基本群と, r -被覆写像との関係について述べる.

G をグラフとし, $v \in V(G)$ とする. 正の整数 i に対し, $V(G)$ の部分集合 $N_i(v)$ を $N_1(v) = N(v)$, $N_{i+1}(v) = \bigcup_{w \in N_i(v)} N(w)$ として帰納的に定義する. グラフの写像 $p: G \rightarrow H$ が r -被覆写像であるとは, 各 $v \in V(G)$ と $1 \leq i \leq r$ なる各 i に対し, $p: N_i(v) \rightarrow N_i(p(v))$ が全単射になることとして定義する.

³[9] ではポセットとしてではなく, 標準単体の直積の部分複体として定義している. 一方で [6] ではポセットで定義しており, 本研究 [13], [14] もそれに倣った. これら二つの定義は有限グラフに対しては同じ位相空間を与えるし, 無限グラフの際もそのホモトピー型は変わらない.

例 5.1. 以下に r -被覆写像の例を与える.

(1) グラフ G, H に対し, 直積グラフ $G \times H$ を, $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, $E(G \times H) = \{((x, y), (x', y')) \mid (x, x') \in E(G), (y, y') \in E(H)\}$ で定義する. グラフ G に対し, 第二射影 $K_2 \times G \rightarrow G$ は任意の正の整数 r に対して r -被覆写像である. G が連結で $\chi(G) \geq 3$ ならば $K_2 \times G$ は連結であることがわかる.

(2) 非負整数 n に対し, n -サイクルグラフ C_n を, $V(C_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $E(C_n) = \{(x, x \pm 1) \mid x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ と定義する. $n \geq 3$ ならば, C_n は n 角形の頂点と辺がなすグラフである. $K_3 \cong C_3$ に注意してほしい.

n を 3 以上の整数, k を非負整数とし, $p: C_{nk} \rightarrow C_n$, $(x \bmod nk) \mapsto x \bmod n$ と定義する. このとき以下が成り立つ.

(i) n が奇数であるとする. このとき, $k = 1, 2$ ならば, 任意の正の整数 r に対して p は r -被覆写像である. (実際, n が奇数ならば $K_2 \times C_n \cong C_{2n}$ である.) $k \geq 3$ または $k = 0$ ならば, p は $(n-1)$ -被覆写像であるが, n -被覆写像ではない.

(ii) n が偶数であるとする. このとき, $k = 1$ ならば, 任意の整数 r に対して p は r -被覆写像であり, それ以外の場合は p は $(n/2) - 1$ -被覆写像であるが, $(n/2)$ -被覆写像ではない.

つづいて基点付きグラフ (G, v) に対する r -基本群 $\pi_1^r(G, v)$ を定義する. ここで基点付きグラフとは, グラフとその頂点の組のことである.

定義 5.2. 非負整数 n に対し, グラフ L_n を $V(L_n) = \{0, 1, \dots, n\}$, $E(L_n) = \{(x, y) \mid |x - y| = 1\}$ と定義する. 基点付きグラフ (G, v) に対し, L_n から G へのグラフ写像 φ で, $\varphi(0) = \varphi(n) = v$ となるものを (G, v) への長さ n のループという. (G, v) のループ全体の集合を $L(G, v)$ で表す. $\varphi, \psi \in L(G, v)$ に対し, 以下の二つの条件 $(1), (2)_r$ を考える:

(1) φ の長さを n とすると, ψ の長さは $(n+2)$ で, ある $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ が存在して, $\varphi(i) = \psi(i)$ ($i \leq x$), $\varphi(i) = \psi(i+2)$ となる.

$(2)_r$ φ と ψ の長さはともに等しく, その長さを n とすると, ある $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ が存在して, $i \notin \{x, x+1, \dots, x+r-2\}$ に対し, $\varphi(i) = \psi(i)$ となる.

(1) と $(2)_r$ で生成される $L(G, v)$ の同値関係を \simeq_r と書き, 商集合 $L(G, v) / \simeq_r$ を $\pi_1^r(G, v)$ で表して, (G, v) の r -基本群と定義する.

注意 5.3. r -基本群について, いくつかの性質を述べる.

(1) $r = 1$ ならば, 条件 $(2)_r$ は $\varphi = \psi$ を意味する. このことは, G がループを持たない⁴ ならば, $\pi_1^1(G, v)$ は G を通常の見方で 1 次元 CW 複体と見た時の基本群に一致することを意味する.

⁴すなわち $v \in V(G)$ で $(v, v) \in E(G)$ なるものが存在しないこと.

- (2) ループ φ に対し, $l(\varphi)$ で φ の長さを表すものとする. このとき $\pi_1^r(G, v) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $[\varphi] \mapsto (l(\varphi) \bmod 2)$, は well-defined な群準同型である. この核を $\pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$ で表し, $\pi_1^r(G, v)$ の偶数部分という. $\alpha \in \pi_1^r(G, v)$ に対し, $\alpha \in \pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$ のとき, α は偶数元であるといい, そうでないとき奇数元であるということにする. グラフ写像の誘導する r -基本群への準同型は, 偶数元・奇数元を保つ. この性質がグラフの写像の非存在性をいうときに本質的な役割を果たす.
- (3) $r \geq s$ ならば, 「 $\varphi \simeq_s \psi \Rightarrow \varphi \simeq_r \psi$ 」が成り立つので, 全射準同型 $\pi_1^s(G, v) \rightarrow \pi_1^r(G, v)$ が存在する.
- (4) $\alpha \in \pi_1^r(G, v)$ に対し, $l(\alpha) = \inf\{l(\varphi) \mid \varphi \in \alpha\}$ で表す. $\alpha, \beta \in \pi_1^r(G, v)$ に対し, $d_r(\alpha, \beta) = l(\alpha^{-1}\beta)$ とすると, d_r は $\pi_1^r(G, v)$ 上の両側不変な距離である. 基点を保つグラフの写像 $f : (G, v) \rightarrow (H, w)$ に対し, $d_r(f_*\alpha, f_*\beta) \leq d_r(\alpha, \beta)$ および $d_r(f_*\alpha, f_*\beta) = d_r(\alpha, \beta) \pmod{2}$ が各 $\alpha, \beta \in \pi_1^r(G, v)$ に対し成り立つ.

例 5.4. r -基本群の例を挙げる.

- (1) n を 3 以上の奇数とする. $\pi_1^r(C_n)$ は $r < n$ ならば \mathbb{Z} と同型で, $r \geq n$ ならば $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である. n が 4 以上の偶数ならば, $r < (n/2)$ のとき $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$ で, $r \geq (n/2)$ のとき $\pi_1^r(C_n)$ は自明である.
- (2) (1) より $\pi_1^2(K_3) \cong \mathbb{Z}$ だが, 4 以上の整数 n に対し, $\pi_1^2(K_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

r -基本群と r -被覆写像とには, 以下の定理のように密接な関係が成り立つ. これはトポロジーにおける基本群と被覆空間の関係と類似の性質である.

定理 5.5. (G, v) を基点付きグラフとする. 以下の二つの圏について考える.

\mathcal{X}_r : 対象は (G, v) 上の, 定義域が連結な, 基点を保つ r -被覆写像で, 射は (G, v) 上基点付きグラフの圏の射.

\mathcal{Y}_r : 対象は $\pi_1^r(G, v)$ への単射群準同型で, 射は $\pi_1^r(G, v)$ 上の群の圏の射.

このとき, $\mathcal{X}_r \rightarrow \mathcal{Y}_r$, $(p : (H, w) \rightarrow (G, v)) \mapsto \text{Im}(\pi_1^r(p))$ は圏同値を与える. すなわち以下が成り立つ.

- (1) r -被覆写像 $p : (H, w) \rightarrow (G, v)$ に対し, $\pi_1^r(p) : \pi_1^r(H, w) \rightarrow \pi_1^r(G, v)$ は単射である.
- (2) $p_i : (H_i, w_i) \rightarrow (G, v)$ ($i = 1, 2$) を r -被覆写像で, H_i は連結とする. このとき, 基点を保つグラフ写像 $f : (H_1, w_1) \rightarrow (H_2, w_2)$ で, $p_2 \circ f = p_1$ となるものが存在することと, $\text{Im}(\pi_1^r(p_1)) \subset \text{Im}(\pi_1^r(p_2))$ なることは同値である. さらに, このような f は存在するならば一意である.
- (3) 各 $\pi_1^r(G, v)$ の部分群 Γ に対し, 基点付きの r -被覆写像 $p_\Gamma : (G_\Gamma, v_\Gamma) \rightarrow (G, v)$ で, G_Γ は連結で $\text{Im}(\pi_1^r(p_\Gamma)) = \Gamma$ なるものが同型を除いて一意に存在する.

例 5.6. 上の定理の例を挙げる.

- (1) (G, v) を基点付きグラフで, G は連結で $\chi(G) \geq 3$ とする. このとき, $K_2 \times G$ は連結であり, 第二射影 $(K_2 \times G, (1, v)) \rightarrow (G, v)$ は任意の正の整数 r に対して r -被覆写像になる. r -被覆写像に対応する $\pi_1^r(G, v)$ の部分群は, 偶数部分 $\pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$ に対応する.

- (2) n を 3 以上の奇数とする. このとき, $r < n$ ならば, $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$ であり, 部分群 $k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ に対応する r -被覆写像は $C_{nk} \rightarrow C_n, (x \bmod nk) \mapsto (x \bmod n)$ である.
- (3) K_n は $n \geq 4$ に対しては $\pi_1^2(K_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる. このことから $n \geq 4$ に対し, K_n の上には連結な 2-被覆写像は二つしかなく, それらは K_n 自身と $K_2 \times K_n$ であることがわかる.

6. グラフの写像の非存在性と, r -基本群

本節では, r -基本群を用いてグラフの写像の非存在性がいえる例を紹介する.

まず, 奇数サイクルへの写像の有無について, 以下の定理が成り立つ.

定理 6.1. n を 3 以上の奇数, r を n より小さい正の整数, G を連結グラフとし, G から C_n へのグラフの写像が存在するとする. このとき任意の奇数元 $\alpha \in \pi_1^r(G)$ に対し, $l(\alpha^k) \geq kn$ ($l(\alpha)$ の意味は注意 4.3(2) 参照) が任意の非負整数 k に対し成立する. 特に $\pi_1^r(G)$ の奇数元は無有限位元であり, $\chi(G) \geq 3$ ならば $\pi_1^r(G)$ は無限群である.

Proof. $\alpha \in \pi_1^r(G)$ を奇数元とすると, $f_*\alpha \in \pi_1^r(C_n)$ も奇数元であり, したがって $l(f_*\alpha) \geq n$ が成り立つ. $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$ に対する考察から, $l(f_*(\alpha)^k) = l(f_*(\alpha))k$ を得る. したがって $l(\alpha^n) \geq l(f_*(\alpha)^k) \geq nk$ を得る. \square

特に $n = 3$ のときを考えると, $C_3 \cong K_3$ から以下の定理が成り立つ.

系 6.2. G を $\chi(G) = 3$ なる連結グラフとすると, $\pi_1^2(G)$ の任意の奇数元は無有限位元である.

例 6.3. 定理 6.1 の応用例を挙げる.

- (1) グラフ G に対し, $g_0(G) = \inf\{2n+1 \mid n \geq 0 \text{ かつ } C_{2n+1} \text{ から } G \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$ と定義する. $g_0(G)$ を G の奇内周という. 一方, $g^0(G) = \sup\{2n+1 \mid n \geq 0 \text{ かつ } G \text{ から } C_{2n+1} \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$ と定義する. 正の奇数 n, m に対し, $n > m$ ならば, C_n から C_m へのグラフの写像は存在するが, C_m から C_n へのグラフの写像は存在しないから, $g_0(G) \geq g^0(G)$ がわかる. $g_0(G)$ を求めるのは比較的簡単なことが多いが, $g^0(G)$ の正確な値を求めることは一般には難しいことである.

定理 6.1 を用いることで, 任意の正の奇数 n, m で $n \geq m$ なるものに対し, グラフ $G_{n,m}$ で, $g_0(G) = n$ かつ $g^0(G_{n,m})$ であるものを構成することができる. 例えば, 次ページの図 1 のグラフの境界の頂点を, その点対称な位置にある頂点と同一視したグラフを G とすると, $g_0(G) = 7, g^0(G) = 5$ となる.

- (2) n を非負整数とする. グラフ G_n を, $V(G_n) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq i, j \leq n\}$, $E(G_n) = \{((i, j)(i', j')) \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$ として定義し, グラフ X_n を, 各 $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対し, $(j, 0), (n, j), (n - j, n), (0, n - j)$ なる G_n の頂点を同一視して得られるグラフとする.

n が偶数ならば $\chi(X_n) = 2$ であり, n が奇数ならば C_n から X_n へのグラフの写像が存在するから $\chi(X_n) \geq 3$ である. 一方, $\pi_1^2(X_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, $n \geq 5$ なる奇数 n に対しては, $\pi_1^2(X_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である. したがって n が奇数のときは $\chi(X_n) \geq 4$

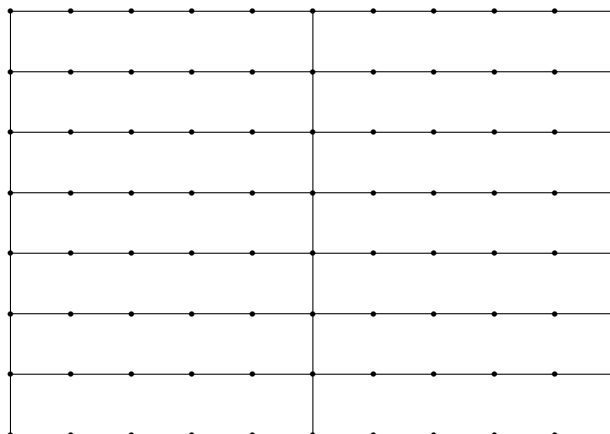


図1

であるが、実際に4色で彩色可能であることがわかるので $\chi(X_n) = 4$ がわかる.

以下, n を5以上の正の奇数とする. 連結グラフ G で, $\chi(G) > 2$, $\pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なるものを考える. このような G の例として, K_m ($m \geq 4$) や, $m \geq 2k + 2$ なる正の整数 m, k に対する Kneser グラフ $K_{m,k}$, および安定 Kneser グラフ $SK_{m,k}$ などがある (後述. 例 7.6 参照). このとき, G からグラフ X_n へのグラフの写像が存在しないことが 2-基本群を比べることからわかる. 実際, G から X_n へのグラフ写像 $f: G \rightarrow X_n$ が存在すると仮定すると, $\alpha \in \pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を非自明な元とすると, $f_*\alpha$ は $\pi_1^2(X_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の偶数部分に属さず, かつ $f_*(\alpha)^2 = 1$ でなくてはならないが, そのような元は $\pi_1^2(X_n)$ には存在しない.

- (3) Kneser グラフ $K_{2k+1,k}$ の彩色数は 3 であるから, $K_{2k+1,k}$ から $C_3(\cong K_3)$ へのグラフの写像は存在する. しかし, $K_{2k+1,k}$ から C_5 へのグラフの写像は存在しない. 実際, $g_0(K_{2k+1,k}) = 2k + 1$ であり, $K_{2k+1,k}$ の長さ $2k + 1$ のループは, $\pi_1^3(K_{n,k})$ において位数が 2 になるからである⁵.
- (4) 以上の例は, グラフ G から奇数サイクル C_n へのグラフ写像が存在するならば, $r < n$ に対する $\pi_1^r(G)$ の奇数元が無限度になるというところのみを使っており, 定理の主張にあるような $l(\alpha^k) \geq nk$ が成り立つという長さに対する制限までは使っていない. そこで, このホモトピー類の長さに着目しなければグラフの写像の非存在性が言えない例を紹介する.

n を 5 以上の奇数とし, X_n を (2) で定義したものとする. このとき, $\pi_1^2(X_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ であるから, X_n の 2-被覆写像に関する普遍被覆 \tilde{X}_n をとると, \tilde{X}_n には $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ が作用する. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の生成元が定めるグラフの写像を $\tau: \tilde{X}_n \rightarrow \tilde{X}_n$ で表す. グラフ \tilde{Y}_n を, $V(\tilde{Y}_n) = V(\tilde{X}_n) \times \mathbb{Z}$, $E(\tilde{Y}_n) = \{((x, i), (y, j)) \mid (i = j \text{ かつ } (x, y) \in E(G)) \text{ または } (x = y \text{ かつ } |i - j| = 1)\}$ が成り立つ} として定義する. \tilde{Y}_n への \mathbb{Z} の作用を, \mathbb{Z} の生成元が定める写像が $(x, i) \mapsto (\tau(x), i + 2)$ であるとして定義し, この作用による商グラフを Y_n で定義する. このとき, $\pi_1^2(Y_n) \cong \mathbb{Z}$ であり, その生成元を α とすると, $l(\alpha) = n + 2$ である. 一方, $l(\alpha^4) = 8 < 3 \cdot 4$ だから, Y_n から K_3 へ

⁵ $\pi_1^3(K_{2k+1,k}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となるような気がするが, よくわからなかった.

のグラフ写像は存在しない. よって $\chi(Y_n) > 3$ だが, 実際に Y_n が4色で彩色可能であることがわかるので, $\chi(Y_n) = 4$ である.

7. r -近傍複体との関係

[15]において, 以下の r -近傍複体なるものを定義した. これは Lovász の近傍複体の自然な一般化であり, r -近傍複体の基本群は $(2r)$ -基本群と密接に関係している. まず定義を述べる.

定義 7.1. G をグラフとする. このとき, r -近傍複体 (r -neighborhood complex) とは,

$$\mathcal{N}_r(G) = \{ \sigma \subset V(G) \mid \#\sigma < \infty \text{ かつ } v \in V(G) \text{ で } \sigma \subset N_r(v) \text{ なるものが存在する.} \}$$

なる単体複体として定義する.

定義から, 1-近傍複体は Lovász の近傍複体 $\mathcal{N}(G)$ に同型である.

定理 7.2. r を正の整数とする. 基点付きグラフ (G, v) で $N(v) \neq \emptyset$ ならば, $\pi_1^{2r}(G, v)_{\text{ev}} \cong \pi_1(\mathcal{N}_r(G), v)$ なる自然な同型がある.

上の定理から, 以下のことがわかる.

系 7.3. G を $\chi(G) > 2$ なるグラフとし, n を3以上の奇数とする. このとき, G から C_n へグラフの写像が存在するならば, $H_1(\mathcal{N}_{(n-1)/2}(G); \mathbb{Z})$ は \mathbb{Z} を直和因子に持つ.

証明の概要: G から C_n にグラフの写像 f が存在するならば, 群準同型 $\pi_1^{n-1}(G) \rightarrow \pi_1^{n-1}(C_n) \cong \mathbb{Z}$ が存在する. $\chi(G) > 2$ だから $\pi_1^{n-1}(G)$ は奇数元を含み, したがって $\pi_1^{n-1}(f)$ は非自明である. $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$ は $\pi_1^{n-1}(G)$ の指数2の部分群だから, $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$ から \mathbb{Z} の写像で, 非自明なものが存在する. このことは $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$ のアーベル化が \mathbb{Z} を直和因子に持つことを意味する. よって定理6.2から主張を得る. \square

補題 7.4. $p: G \rightarrow H$ を $(2r)$ -被覆写像とすると, $\mathcal{N}_r(p): \mathcal{N}_r(G) \rightarrow \mathcal{N}_r(H)$ は被覆写像である.

定理6.2と上の補題を合わせることで, r -近傍複体の上の被覆写像は, $(2r)$ -被覆写像により完全に把握できることがわかる. つまり, 次がわかる.

定理 7.5. r を正の整数, (G, v) を基点付きのグラフで G は連結, $N(v) \neq \emptyset$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\chi(G) = 2$ とする. このとき基点付き空間 $(\mathcal{N}_r(G), v)$ の上の基点付きで定義域が連結な被覆写像のなす圏は, 基点付きグラフ (G, v) の上の基点付きで定義域が連結な $(2r)$ -被覆写像のなす圏と同値になる.
- (2) $\chi(G) \geq 3$ とする. このとき基点付き空間 $(\mathcal{N}_r(G), v)$ の上の基点付きで定義域が連結な被覆写像のなす圏は, 基点付きグラフ $(K_2 \times G, (1, v))$ の上の基点付きで定義域が連結な $(2r)$ -被覆写像のなす圏と同値になる.

例 7.6. 近傍複体に関する既存の結果と定理6.2からわかることをまとめる.

- (1) グラフ G に対し, グラフ G^+ を

$$V(G^+) = V(G) \sqcup \{*\}, \quad E(G^+) = E(G) \cup (V(G) \times \{*\}) \cup (\{*\} \times V(G))$$

により定義する. このとき, $\mathcal{N}(G^+)$ は $\mathcal{N}(G)$ の懸垂にホモトピー同値であることが知られている. (例えば [5] 参照) $\chi(G) \geq 3$ で G が連結ならば, $\mathcal{N}(G)$ は連結で, したがって $\mathcal{N}(G)$ は単連結である. したがって $\pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, このとき G^+ の上の連結な 2-被覆写像は G^+ 自身と $K_2 \times G^+$ のみである.

- (2) Lovász は $K_{n,k}$ が $n \geq 2k$ のとき, $\mathcal{N}(K_{n,k})$ が $(n - 2k - 1)$ -連結であることを示した. また, 安定 Kneser グラフ $SK_{n,k}$ を

$$V(SK_{n,k}) = \{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \#\sigma = k \text{ で, } i \in \sigma \text{ なら } i+1 \notin \sigma. \}$$

$$E(SK_{n,k}) = \{ (\sigma, \tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset \}$$

により定義する. Schriever は $\mathcal{N}(SK_{n,k})$ は $(n - 2k - 1)$ -連結であることを示し⁶, $\chi(SK_{n,k}) = n - 2k + 2$ を示した. これらの結果から, $n \geq 2k + 2$ ならば, $K_{n,k}(SK_{n,k})$ の 2-基本群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であり, その上の 2-被覆写像はそれ自身と, $K_2 \times K_{n,k}$ ($K_2 \times SK_{n,k}$) のみであることがわかる.

r が奇数の時は, Lovász の近傍複体と同様の手法によって, r -近傍複体のトポロジーを比べることでグラフの写像の存在を調べることができる.

定義 7.7. r を正の整数, G をグラフとする. ポセット $\mathcal{B}_r(G)$ を

$$\{ (\sigma, \tau) \mid \sigma, \tau \text{ は } V(G) \text{ の有限部分集合で, 各 } v \in \sigma \text{ に対し } \tau \subset N_r(v) \}$$

と定める. 順序は 「 $(\sigma, \tau) \leq (\sigma', \tau') \Leftrightarrow \sigma \subset \sigma'$ かつ $\tau \subset \tau'$ 」 によって定める.

単体複体 Δ に対し, $F\Delta$ でその面ポセットを表した. (2節を参照)

補題 7.8. グラフ G に対し, $\mathcal{B}_r(G) \rightarrow FN(G), (\sigma, \tau) \mapsto \sigma$ はホモトピー同値写像である. 特に $\mathcal{B}_r(G)$ と $\mathcal{N}_r(G)$ は同じホモトピー型を持つ.

r が奇数で $g_0(G) > r$ ならば, $\mathcal{B}_r(G)$ は自由 \mathbb{Z}_2 -空間となる. グラフ G と H で, $g_0(G), g_0(H) > r$ なるものが与えられたとき, $\mathcal{B}_r(G)$ と $\mathcal{B}_r(H)$ の第 1 Stiefel-Whitney 類の冪がいつ 0 になるかを比べることにより, G から H にグラフの写像の非存在がいえる. 実際に次のような例がある.

命題 7.9. n, k, r を正の整数で, $n > 2k$, $(n - 2k)r = k - 1$ を満たすものとする. このとき, 各 $v \in V(K_{n,k})$ に対し, $N_{2r-1}(v) = V(K_{n,k}) - \{v\}$ が成り立つ. したがって $g_0(K_{n,k}) = 2r + 1$ であり, $\mathcal{N}_{2r-1}(K_{n,k})$ は $(\#V(K_{n,k}) - 2) = \binom{n}{k} - 2$ 次元の球面に同相である.

上の命題を用いることで, 以下のことがわかる.

系 7.10. n, k, r を正の整数とし, $n > 2k$, $(n - 2k)r = k - 1$ を満たすものとする. このとき, 奇内周が $(2r + 1)$ 以上のグラフ G で, $\#V(G) < \binom{n}{k}$ を満たすものに対し, $K_{n,k}$ から G へのグラフの写像は存在しない.

上のように特殊なグラフの場合には, r -近傍複体のホモトピー型を計算することができるが, 一般にはそのホモトピー型を決定することは非常に難しい.

⁶より強く, Björner と Longueville は [4] において $\mathcal{N}(SK_{n,k})$ が S^{n-2k} にホモトピー同値であることを示している.

参考文献

- [1] I. Barany, *A short proof of Kneser's conjecture*, J. Combin. Ser. A **25** (3) 325-326, (1978)
- [2] E. Babson, D. Kozlov, *Complexes of graph homomorphisms*, Israel J. Math. **152**, 285-312 (2006)
- [3] E. Babson, D. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Ann. Math. **165** (3) 965-1007 (2007)
- [4] A. Björner, M. Longueville, *Neighborhood complexes of stable Kneser graphs*, Combinatorica, **23** (1):23-34, 2003.
- [5] P. Csorba, *Homotopy types of box complexes*. Combinatorica **27** (2007) (6):669-682.
- [6] A. Dochtermann, *Hom complexes and homotopy theory in the category of graphs*, European J. Combin. **30** (2) 490-509 (2009)
- [7] J. Greene, *A new short proof of Kneser's conjecture*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), no. 10, pp. 918-920.
- [8] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **58**, (1955/56), 2 Abt., 27
- [9] D.N. Kozlov *Combinatorial algebraic topology*, Algorithms and Computation in Mathematics **21**, Springer, Berlin, 2008
- [10] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J. Comb. Theory, Ser. A, **25** (1978), 319-324
- [11] J. Matoušek, G. Ziegler, *Topological lower bounds for the chromatic number*, Jahresbericht der DMV **106**, 71-90, 2004
- [12] J. Matoušek, *A combinatorial proof of Kneser's conjecture*, Combinatorica **24** (2004), no. 1, pp. 163-170
- [13] T. Matsushita, *Fundamental groups of neighborhood complexes*, arXiv:1210.2803
- [14] T. Matsushita, *Generalized covering map theory of graphs*, arXiv:1301.7217
- [15] T. Matsushita, *Generalization of neighborhood complexes*, arXiv:1305.2503
- [16] A. Schriver, *Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs*, Nieuw Arch. Wisk. III, Ser., **26**:454-461, 1978
- [17] C. Schultz, *Graph colourings, spaces of edges and spaces of circuits*, Adv. Math. **221** (6):1733-1756, 2009
- [18] R. Živaljević, *WI-posets, graph complexes and \mathbb{Z}_2 -equivalences*, J. Combin. Theory Ser. A **111** (2005), no. 2, pp. 204-223