Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties

高倉　樹　(中央大学)*

概　　要

multiplicity variety と呼ばれる空間族を導入し，特性数の計算と応用を考察する．またそこでの組合せ的側面を抽出して，ウェイト付きの vector partition function と volume function を定義し，それらの明示公式を与える．さらに，volume function と超幾何関数論との関わりを論ずる．

1. Multiplicity variety とテンソル積表現の分解

1.1. 問題と概要

G を単連結コンパクト単純リー群，T を極大トーラスとし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ を G, T のリー環，$\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{t}^*$ をそれらの双対とする．しばしば，内積を用いて $\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ とみなす．G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用による $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ ($\subset \mathfrak{g}^*$) の軌道を $\mathcal{O}_\lambda$ で表す．$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu \in \mathfrak{t}^*$ に対し，次のような商（シンプレクティック商あるいはケーラー商と呼ばれる）を考える．

$$\mathcal{M}_G = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}) /\!\!/ G := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}/G,$$
$$\mathcal{M}_T = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}) /\!\!/_\mu T := \{(x_1, \dots, x_n) \mid p(x_1 + \cdots + x_n) = \mu\}/T.$$

ただし $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{t}^*$ は射影であり，G は直積空間に対角的に作用するものとする．これらの空間を総称して **multiplicity variety** とよび，特に後者を **multiple weight variety** と呼ぶ．

その名前は，幾何的量子化における空間と表現の対応に由来する．P ($\subset \mathfrak{t}^*$) を G のウェイト格子，P_+ を支配的ウェイトの集合とし，$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P_+$, $\mu \in P$ の場合を考える．Borel-Weil の定理により，λ_i を通る余随伴軌道 $\mathcal{O}_{\lambda_i}$ は，λ_i を最高ウェイトにもつ G の既約表現 V_{λ_i} に対応する．また，直積 $\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}$ はテンソル積表現 $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$ に対応する．このとき，商 $\mathcal{M}_G$ は不変部分空間 $(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n})^G$ に対応し，$\mathcal{M}_T$ はウェイトの重複度を表す $[V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n} : \mathbb{C}_\mu] := \mathrm{Hom}_T(\mathbb{C}_\mu, V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n})$ に対応する．ここで $\mathbb{C}_\mu$ はウェイト μ をもつ T の 1 次元表現である．

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ および μ の取り方により位相型が様々に変わるため，これらの空間の性質は非常に興味深い．

問題 1.1. $\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_T$ のトポロジー・幾何について調べよ．

既知の諸結果をここで列挙することはしないが，例えば G が A 型で，各 $\mathcal{O}_{\lambda_i}$ が射影空間やグラスマン多様体の場合の $\mathcal{M}_G$ については，[14], [11] 以降（あるいは古典的な不変式論の文脈でそれ以前にも），いくつかのことが調べられている．特に $G = SU(2)$ の場合が基本的な例となる．また，$n = 1$ のときの $\mathcal{M}_T$ は，[12] 以降 **weight variety** と呼ばれている．$n = 2$ のときは **double weight variety** と呼ばれ，$G = SU(3)$ の場

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 課題番号 24540093) の助成を受けたものである．
* 〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部
e-mail: takakura@math.chuo-u.ac.jp

合にSuzuki [17, 18] により詳しく調べられた（1.4節参照）．とはいえ，まだ手が付いていていないことの方が多い．例えばラグランジュ部分多様体や微分幾何的な性質も面白いと思われる．

さて，ここで問題にしたいのは，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_G, \mathcal{M}_T$ のコホモロジー交叉積，特に特性数

$$\mathrm{RR}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} e^{\omega}\mathrm{Td}(\mathcal{M}) \quad \text{および} \quad \mathrm{vol}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} e^{\omega} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^d}\int_{\mathcal{M}} e^{k\omega}\mathrm{Td}(\mathcal{M})$$

の計算である．ただし，ω は $\mathcal{M}$ のシンプレクティック形式，$\mathrm{Td}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ の Todd 形式，d は $\mathcal{M}$ の複素次元である．例えば $\mathrm{vol}(\mathcal{M})$ が $\mathcal{M}$ のトポロジーについて（そこそこ）豊富な情報を含むことは，1.3節で説明する．

シンプレクティック商のコホモロジー交叉積に関する一般論として，Jeffrey-Kirwan によるresidue formula [9] や，Martinによる積分公式 [13] 等の手法が知られているが，我々は空間の由来に着目し，$\mathrm{RR}(\mathcal{M})$, $\mathrm{vol}(\mathcal{M})$ を表現の言葉で言い換える．簡単のため，$\mathcal{M}$ は滑らかと仮定し，またあらかじめ適当な正整数を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P_+$, $\mu \in P$ にかけておく．このとき，上で述べた空間と表現の対応（特にGuillemin-Sternbergの定理 [5]）から次が得られる．

$$\mathrm{RR}(\mathcal{M}_G) = \dim(V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n})^G, \quad \mathrm{vol}(\mathcal{M}_G) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^d}\dim(V_{k\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{k\lambda_n})^G,$$

$$\mathrm{RR}(\mathcal{M}_T) = [V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n} : \mathbb{C}_\mu], \qquad \mathrm{vol}(\mathcal{M}_T) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{d'}}[V_{k\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{k\lambda_n} : \mathbb{C}_{k\mu}].$$

問題 1.2. 上式の右辺を $q_G(\vec{\lambda})$, $v_G(\vec{\lambda})$, $q_T(\vec{\lambda}, \mu)$, $v_T(\vec{\lambda}, \mu)$ と記す．これらを可能な限り明示的に表せ．

一つの自然なアプローチは，指標を用いる方法である．Weyl の指標公式を用いて $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$ から必要な情報を得ようとすると，第 2 節で述べる vector partition functionおよびvolume functionの考察へと導かれる（2.4節参照）．一方，Verlinde の公式を用いた別のアプローチを1.5節で述べる．

1.2. 例：$G = SU(2)$ の場合

$G = SU(2)$ のときは，一般の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$ に対して，$q_G(\vec{\lambda})$, $v_G(\vec{\lambda})$, $q_T(\vec{\lambda}, \mu)$, $v_T(\vec{\lambda}, \mu)$ が比較的きれいな形に求められる（[22] 等を参照）．例えば $v_G(\vec{\lambda})$ について，次が成り立つ.（ただし，Λ_1 は基本ウェイト，$\alpha_1 = 2\Lambda_1$ は単純ルートである.）

定理 1.3. $i = 1, \ldots, n$ に対し，$\lambda_i = m_i\Lambda_1 = \dfrac{m_i}{2}\alpha_1$ $(m_i \in 2\mathbb{Z}_{>0})$ とし，$M = m_1 + \cdots + m_n$ とおく．このとき，$d = n - 3$ であり，$v_G(\vec{\lambda})$ は次の 3 通りに表される．

(1) $$v_G(\vec{\lambda}) = -\frac{1}{2(n-3)!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\left(\varepsilon_1\frac{m_1}{2}+\cdots+\varepsilon_n\frac{m_n}{2}\right)^{n-3},$$

（和は $\varepsilon_1\dfrac{m_1}{2}+\cdots+\varepsilon_n\dfrac{m_n}{2} > 0$ をみたす $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ 全体にわたる）

(2) $$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{4M^{n-3}}{\pi^{n-2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^n \sin\frac{\pi m_i p}{M}}{p^{n-2}},$$

(3) $$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^n \sin m_i x}{x^{n-2}}dx.$$

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ のとき，(1) は２元形式の不変式論に関する Hilbert の古典的な結果と深く関連する（[16] 等を参照）．$G = SU(3)$ の場合の (1) の類似については [19] を参照のこと．また，(2)(3) の一般化が 1.5 節で得られる．

1.3. volume からわかること

$\mathcal{M}_G$, $\mathcal{M}_T$ のシンプレクティック形式を記述しよう．まず $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ とし，余随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda$ 上のシンプレクティック形式（Kirillov-Kostant-Souriau 形式）を ω_λ と記す．G の $\mathcal{O}_\lambda$ への作用のモーメント写像 Φ_λ は包含写像 $\mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ である．G の階数を l とし，$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ を基本ウェイトとする．$\lambda = p_1\Lambda_1 + \cdots + p_l\Lambda_l$ と表すとき，$p_i \neq 0$ ならば，$\mathcal{O}_\lambda$ 上の閉２形式 ω_{Λ_i} と写像 $\Phi_{\Lambda_i} : \mathcal{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$ が定まり，

$$\omega_\lambda = p_1\omega_{\Lambda_1} + \cdots + p_l\omega_{\Lambda_l}, \quad \Phi_\lambda = p_1\Phi_{\Lambda_i} + \cdots + p_l\Phi_{\Lambda_i}$$

が成り立つ．これから，$\mathcal{M}_G$ のシンプレクティック形式ω_G は

$$\omega_G = \sum_{i=1}^{n} (p_{i,1}z_{i,1} + \cdots + p_{i,l}z_{i,l}) \qquad (z_{i,j} \in Z^2(\mathcal{M}_G))$$

の形になる．さらに，$\mu \in \mathfrak{t}^*$ を $\mu = x_1\Lambda_1 + \cdots + x_l\Lambda_l$ と表すとき，Duistermaat-Heckman の定理の精密化（[6] 参照）から，$\mathcal{M}_T$ のシンプレクティック形式 ω_T は

$$\omega_T = \sum_{i=1}^{n} (p_{i,1}z_{i,1} + \cdots + p_{i,l}z_{i,l}) + x_1\gamma_1 + \cdots + x_l\gamma_l \qquad (z_{i,j}, \gamma_k \in Z^2(\mathcal{M}_T))$$

の形になる．したがって，次が得られる．

命題 1.4. (1) $\mathrm{vol}(\mathcal{M}_G)$ は $p_{i,j}$ の多項式であり，交叉積 $\displaystyle\int_{\mathcal{M}_G} {z_{1,1}}^{d_{1,1}} \cdots {z_{n,l}}^{d_{n,l}}$ の母関数になる．

(2) $\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T)$ は $p_{i,j}, x_k$ の多項式であり，交叉積 $\displaystyle\int_{\mathcal{M}_T} {z_{1,1}}^{d_{1,1}} \cdots {z_{n,l}}^{d_{n,l}} \gamma_1^{e_1} \cdots \gamma_l^{e_l}$ の母関数になる．

系 1.5. $G = SU(2)$ の場合，定理 1.3(1) から $\mathcal{M}_G$ のすべての交叉積がわかる．$\mathcal{M}_T$ についても同様である．より一般に $G = SU(l+1)$ とし，各余随伴軌道 $\mathcal{O}_{\lambda_i}$ が $U(l+1)/(U(1) \times \cdots \times U(1) \times U(k_i))$ の位相型をもつと仮定する．このとき，$H^*_{\mathrm{DR}}(\mathcal{M}_T)$ が乗法的に $z_{i,j}, \gamma_k$ たちで生成されることが示される．ゆえに，$\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T)$ が $p_{i,j}, x_k$ の多項式として具体的に求まるならば，$\mathcal{M}_T$ のすべての交叉積がわかる．すなわち，原理的には $\mathbb{R}$ 係数コホモロジーの環構造がわかることになる．

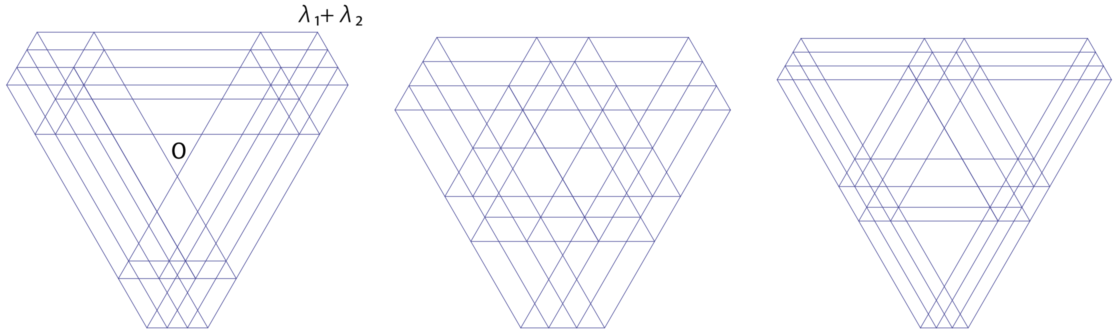
1.4. 例：$SU(3)$ の double weight variety

$G = SU(3)$ とする．Suzuki [17, 18] は，double weight variety $\mathcal{M}_T = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2})/\!\!/_\mu T$ のシンプレクティック体積 $\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T) = v_T(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$ を詳しく調べた．特に，

(1) μ が $\lambda_1 + \lambda_2$ に隣接する alcove に属す場合

(2) μ が 0 と同じ alcove に属す場合

を考え，$\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T)$ として現れるすべての式を決定した．ここで **alcove** とは，射影 $p: \mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2} \to \mathfrak{t}^*$ の正則値の集合の連結成分のことである．λ_1, λ_2 が動くと，alcoves の配置も様々に変わる（次図参照）．



簡単のため $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}^*_{++} = \mathbb{R}_{>0}\Lambda_1 + \mathbb{R}_{>0}\Lambda_2$ と仮定し，$\lambda_1 = p\Lambda_1 + q\Lambda_2$, $\lambda_2 = r\Lambda_1 + s\Lambda_2$, $\mu = x\Lambda_1 + y\Lambda_2$ とおく．

(1) μ が $\lambda_1 + \lambda_2$ の「真下の」alcove に属す場合，

$$\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T) = \frac{1}{12}(p+r-x)^3(-p+2q-r+2s+x-2y)$$

が成り立つ([18, Corollary 4.1])．系 1.5 を用いて $\mathcal{M}_T$ のポアンカレ多項式 $P_t(\mathcal{M}_T)$ を求めると，次の形になる．

$$P_t(\mathcal{M}_T) = 1 + 2t^2 + 2t^4 + 2t^6 + t^8 = (1+t^2)(1+t^2+t^4+t^6) \ (= P_t(\mathbb{P}^1) \cdot P_t(\mathbb{P}^3)).$$

(2) について，例えば $2q > p > q$, $2s > r > s$, $p > q + r$ の場合は，

$$\mathrm{vol}(\mathcal{M}_T) = \frac{1}{2}(2q-p)(2r-s)(2s-r)(r+s)$$

である([18, Section 4.3, Case (Va)])．これから，$P_t(\mathcal{M}_T) = 1 + 3t^2 + 4t^4 + 3t^6 + t^8$ となる．すべての場合を調べて，次を得る．

定理 1.6 ([21])**.** $G = SU(3)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}^*_{++}$ とする．μ が $\lambda_1 + \lambda_2$ に隣接する alcove に属すとき，$\mathcal{M}_T = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2})/\!\!/_{\mu} T$ のポアンカレ多項式は $(1+t^2)(1+t^2+t^4+t^6)$ である．一方，μ が 0 と同じ alcove に属すとき，$\mathcal{M}_T$ のポアンカレ多項式は

$$1 + 3t^2 + 4t^4 + 3t^6 + t^8 \quad \text{または} \quad 1 + 6t^2 + 10t^4 + 6t^6 + t^8$$

である．

1.5. Verlinde の公式の応用

再び G を階数 l の単連結コンパクト単純リー群とし，$q_G(\vec{\lambda})$ に対する別種の表示を導く．W をワイル群，Δ_+ を正ルートの集合，θ を最高ルート，Q をルート格子，$Q^\vee$ をコルート格子とする．また，$P_{++} = \mathbb{Z}_{>0}\Lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{>0}\Lambda_l$, $\rho = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_l$ とする．

レベルと呼ばれる正整数 m を固定し，$P_+^m := \{x \in P_+ \mid (x|\theta) \le m\}$ とおく．ただし $(\cdot|\cdot)$ は標準内積である．$\lambda, \mu, \nu \in P_+^m$ に対し，フュージョン係数と呼ばれる数 $N_{\lambda,\mu}^{\nu}$ が定まる．それは，$V_\lambda \otimes V_\mu$ の既約分解

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \sum_{\nu \in P_+} n_{\lambda,\mu}^{\nu} V_\nu$$

の係数 $n^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を，m に応じて少し修正することにより得られる（[27] 等を参照）．レベル m が十分大きいならば，$N^{\nu}_{\lambda,\mu} = n^{\nu}_{\lambda,\mu}$ が成り立つ．一方，Verlinde の公式として

$$N^{\nu}_{\lambda,\mu} = \sum_{x \in P^m_+} \frac{a(\lambda,x)a(\mu,x)a(\nu,x)}{a(x)}$$

が成り立つことが知られている．ただし，$\lambda, \mu \in P^m_+$ に対し，

$$a(\lambda,\mu) := (\sqrt{-1})^{|\Delta_+|}|P/(m+g)Q^{\vee}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m+g}(\lambda+\rho|w(\mu+\rho))\right)$$

$$a(\mu) := (\sqrt{-1})^{|\Delta_+|}|P/(m+g)Q^{\vee}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m+g}(\mu+\rho|w(\rho))\right)$$

である．ただし g は双対 Coxeter 数である．これから次が得られる．

命題 1.7 ([20])**.** $m \geq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n|\theta)$ のとき，次が成り立つ．

$$q_G(\vec{\lambda}) = \sum_{\mu \in P^m_+} \frac{a(\lambda_1,\mu)a(\lambda_2,\mu)\cdots a(\lambda_n,\mu)}{a(\mu)^{n-2}}.$$

$m = k(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n|\theta)$ として

$$\frac{1}{k^d}\,\mathcal{Q}_G(k\lambda_1,\ldots,k\,\lambda_n) = \sum_{\mu \in P^m_+} \frac{1}{k^d}\frac{a(k\lambda_1,\mu)a(k\lambda_2,\mu)\cdots a(k\lambda_n,\mu)}{a(\mu)^{n-2}}$$

の極限をとると，次が得られる．

定理 1.8 ([20])**.** $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in Q \cap P_{++}$ とし，$n-2 > l$, $n \geq 5$ と仮定する．$\Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, $d = (n-2)|\Delta_+| - l$ とおくとき，次が成り立つ．

$$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{|P/Q|}{|P/Q^{\vee}|} \cdot (\Lambda|\theta)^d \cdot \left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha \in \Delta_+} 2\sin\frac{\pi(\lambda_i|\alpha)}{(\Lambda|\theta)}\right) \sum_{\mu \in P_+} \frac{\prod_{i=1}^n \chi_\mu\left(\exp\frac{-2\pi\sqrt{-1}\lambda_i}{(\Lambda|\theta)}\right)}{\left(\prod_{\alpha\in\Delta_+} 2\pi(\mu+\rho|\alpha)\right)^{n-2}}.$$

注意 1.9. 命題1.7, 定理1.8 はそれぞれ，点つき球面上の平坦 G 接続のモジュライ空間に対する Verlinde の公式，Witten の体積公式とほぼ同じ形をしている（[28] 参照）．これは，このモジュライ空間が multiplicity variety $\mathcal{M}_G$ とシンプレクティック同相であるという事実（[8]) と整合している．またこの事実から，λ_i が $P_+ - P_{++}$ に属す場合にも類似の公式が成り立つはずである．しかし，それを組合せ的に直接証明することはできていない．なお，$q_T(\vec{\lambda},\mu)$ や $v_T(\vec{\lambda},\mu)$ に対しては，このような等式は知られていない．

一般に，λ_i が ρ のスカラー倍の場合，右辺が比較的きれいになる．

例 1.10. $G = SU(3)$, $\lambda_1 = m_1\rho,\ldots,\lambda_n = m_n\rho$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$) とし，$M = m_1 + \cdots + m_n$ とおく．次が成り立つ．

(1) $$v_G(\vec{\lambda}) = 2^6 \cdot (2M)^{3n-8} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{\prod_{i=1}^n \sin\frac{\pi m_i p}{2M}\sin\frac{\pi m_i q}{2M}\sin\frac{\pi m_i(p+q)}{2M}}{(\pi p \cdot \pi q \cdot \pi(p+q))^{n-2}}$$

(2) $$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{2^6}{\pi^2}\int_{x,y\geq 0} \frac{\prod_{i=1}^n \sin m_i x \cdot \sin m_i y \cdot \sin m_i(x+y)}{(xy(x+y))^{n-2}}\,dxdy$$

2. Vector partition function と volume function

2.1. Vector partition function

$\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ は $\mathbb{R}^d$ のある格子の元で，すべてが $\mathbb{R}^d$ のある半開空間（境界は原点を通る超平面）に属すと仮定する．$\Delta=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ とおく．$\lambda\in\sum_{i=1}^{N}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に対し，

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda):=\sharp\{x=(x_1,\ldots,x_N)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N\mid x_1\alpha_1+\cdots+x_N\alpha_N=\lambda\}$$

を **vector partition function** と呼ぶ．$\mathcal{P}_\Delta(\lambda)$ の母関数は

$$\begin{aligned}\sum_\lambda \mathcal{P}_\Delta(\lambda)\,e^\lambda &= \frac{1}{\prod_{i=1}^N(1-e^{\alpha_i})}\\ &=(1+e^{\alpha_1}+e^{2\alpha_1}+\cdots)\cdot\cdots\cdot(1+e^{\alpha_N}+e^{2\alpha_N}+\cdots).\end{aligned}$$

である．ただし $\lambda\in\sum_{i=1}^{N}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に対して形式的なべき e^λ を考え，積を $e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}=e^{\lambda_1+\lambda_2}$ で定めるものとする．また $h\in\sum_{i=1}^{N}\mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_i$ に対し，

$$X_\Delta(h):=\{x=(x_1,\ldots,x_N)\in(\mathbb{R}_{\geq 0})^N\mid x_1\alpha_1+\cdots+x_N\alpha_N=h\}$$

とおき，**partition polytope** と呼ぶ．$\mathcal{P}_\Delta(\lambda)$ は $X_\Delta(\lambda)$ 内の格子点の個数に他ならない．すなわち，

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda)=\sum_{x\in X_\Delta(\lambda)\cap\mathbb{Z}^N}1$$

である．さらに $y=(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{R}^N$, $m=(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbb{Z}^N$ とし，

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda,y):=\sum_{x\in X_\Delta(\lambda)\cap\mathbb{Z}^N}e^{-(x_1y_1+\cdots+x_Ny_N)},\quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda;m):=\sum_{x\in X_\Delta(\lambda)\cap\mathbb{Z}^N}\prod_{i=1}^N\left(\!\!\binom{m_i}{x_i}\!\!\right),$$

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda,y;m):=\sum_{x\in X_\Delta(\lambda)\cap\mathbb{Z}^N}\left(\prod_{i=1}^N\left(\!\!\binom{m_i}{x_i}\!\!\right)e^{-x_iy_i}\right)$$

と定義する．これらも vector partition function と総称する．ここで

$$\left(\!\!\binom{m}{x}\!\!\right)=\begin{cases}\binom{m+x-1}{x} & (m>0\text{ のとき})\\ (-1)^x\binom{-m}{x} & (m\leq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

である．定義から

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda)=\mathcal{P}_\Delta(\lambda,0\,;1),\quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda,y)=\mathcal{P}_\Delta(\lambda,y;1),\quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda;m)=\mathcal{P}_\Delta(\lambda,0\,;m)$$

である．また，$\mathcal{P}_\Delta(\lambda,y;m)$ の母関数は

$$\sum_v\mathcal{P}_\Delta(\lambda,y;m)\,e^\lambda=\frac{1}{\prod_{i=1}^N(1-e^{-y_i}e^{\alpha_i})^{m_i}}$$

である．以下，$m=(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbb{Z}^N$ を**ウェイト**と呼ぶ.

2.2. Volume function

上記の連続版を考える．$h \in \sum_{i=1}^{N} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_i$ に対し，

$$\mathcal{V}_\Delta(h) := \int_{X_\Delta(h)} d\mu, \qquad \mathcal{V}_\Delta(h,y) := \int_{X_\Delta(h)} e^{-(x_1y_1+\cdots+x_Ny_N)} d\mu$$

と定義する．ただし，$d\mu$ は超平面 $\{(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1\alpha_1+\cdots+x_N\alpha_N = v\}$ 上に自然に定まる測度である．

さらに，まずすべての m_i が正の場合に

$$\mathcal{V}_\Delta(h;m) := \int_{X_\Delta(h)} \prod_{i=1}^{N} \frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!} d\mu, \quad \mathcal{V}_\Delta(h,y;m) := \int_{X_\Delta(h)} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{-x_iy_i} \right) d\mu$$

と定義する．m_i の中に ≤ 0 のものがあるときは，非積分関数の意味づけが問題となる．$m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対し，

$$\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} := \delta_x^{(|m|)} \,(=\text{「}x=0 \text{ に台を持つデルタ関数の } |m| \text{ 階導関数」})$$

と定める．これらの積および積分について次が成り立つ（[10], [7] 参照）．

補題 2.1. h が $C(\Delta) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_j$ のある chamber（定義は下記参照）に属すと仮定する．このとき，m_i の中に ≤ 0 のものがある場合にも，hyperfunctioin あるいは distribution として積 $\prod_{i=1}^{N} \frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!}$ の $X_\Delta(h)$ への制限が well-defined であり，積分 $\mathcal{V}_\Delta(h;m), \mathcal{V}_\Delta(h,y;m)$ も well-defined となる．

つまり，h が $C(\Delta)$ のある chamber に属しているならば，m_i の正負に関わらず $\mathcal{V}_\Delta(h;m), \mathcal{V}_\Delta(h,y;m)$ が定義される．$\mathcal{V}_\Delta(h), \mathcal{V}_\Delta(h,y), \mathcal{V}_\Delta(h;m), \mathcal{V}_\Delta(h,y;m)$ を総称して，**(vector partition) volume function** と呼ぶ．なお，chamber の定義は次の通りである．

定義 2.2. $\{1,\ldots,N\}$ の部分集合 J に対し，$C(J) = \sum_{j\in J} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_j$ と記す．このとき，$C(J)$ の共通部分たちは，凸錐による $C(\Delta)$ の分割を与える．その分割における各 d 次元錐の内部を $C(\Delta)$ の **chamber** と呼ぶ．

2.3. 歴史など

vector partition function や volume fuction は，多方面からの動機に基づいて様々な研究がなされている．文献（の一部）として，[4], [2], [3] を挙げる．また上述のように，それらは凸体の格子点の個数や体積とみなすことができるため，その研究も含めるならば，さらに長い歴史をもつことになる．

ところで，vector partition function や volume function に関する文献の多くは，ウェイト $m = (m_1,\ldots,m_N)$ を考慮していない．実際，α_i たちの中に同じものがあっても特に支障はない．そこで m_i が ≥ 2 の場合は，α_i を m_i 個重複させて Δ に含めておけばよく，始めからすべての m_i を 1 としても一般性を失わないのである．しかしな

がら我々は，ウェイト $m = (m_1, \dots, m_N)$ を大切なパラメータとして認識し，さらに m_i の中に負のものがある場合も重要視する．なお [4] では，すべての m_i が正の場合の $\mathcal{V}(\lambda; m)$ が考察されている．超幾何関数論との関連については，2.6 節で論ずる．

2.4. 例：再び multiplicity variety について

以上の概念を用いると，1.1 節の $q_G(\vec{\lambda})$, $q_T(\vec{\lambda}, \mu)$ は次のように表される．

$$q_G(\vec{\lambda}) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|} \sum_{w_1,\dots,w_n \in W} \varepsilon(w_1)\cdots\varepsilon(w_n)\,\mathcal{P}_{\Delta_+}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(\lambda_i+\rho) - (n-2)\rho\,;\, n-2\right)$$

$$q_T(\vec{\lambda}, \mu) = \sum_{w_1,\dots,w_n \in W} \varepsilon(w_1)\cdots\varepsilon(w_n)\,\mathcal{P}_{\Delta_+}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(\lambda_i+\rho) - n\rho - \mu\,;\, n\right).$$

また，$v_G(\vec{\lambda})$, $v_T(\vec{\lambda}, \mu)$ については，例えばすべての λ_i が P_{++} に属すならば，

$$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|}\varepsilon(w_1)\cdots\varepsilon(w_n) \sum_{w_1,\dots,w_n \in W} \mathcal{V}_{\Delta_+}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(\lambda_i)\,;\, n-2\right)$$

$$v_T(\vec{\lambda}, \mu) = \sum_{w_1,\dots,w_n \in W} \varepsilon(w_1)\cdots\varepsilon(w_n)\,\mathcal{V}_{\Delta_+}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i(\lambda_i) - \mu\,;\, n\right)$$

が成り立つ．なお $\lambda_i \in P_+ - P_{++}$ となる i がある場合は，$v_G(\vec{\lambda})$ は負のウェイトをもつ volume function を用いて表される．これが負のウェイトを考えた動機の一つである．

2.5. Brion-Vergneの公式の一般化

Brion-Vergne [2] は，$\mathcal{P}_\Delta(\lambda, y)$, $\mathcal{V}_\Delta(h)$, $\mathcal{V}_\Delta(h, y)$ に対するきれいな明示公式を与えている．この結果を，ウェイト m がある場合（特に負の m_i がある場合）へ拡張する．結果を述べるために記号を導入する．

定義 2.3.

- $\{1, \dots, N\}$ の部分集合 σ が Δ の基底であるとは，$(\alpha_j \,|\, j \in \sigma)$ が $\mathbb{R}^d$ の基底であるときをいう．Δ の基底全体の集合を $\mathcal{B}(\Delta)$ と記す．

  $C(\Delta)$ の chamber γ に対し，$\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$ で $\gamma \subset C(\sigma)$ をみたすもの全体の集合を $\mathcal{B}(\Delta, \gamma)$ と記す．

  Δ の部分集合 Δ' に対しても，同様に $\mathcal{B}(\Delta')$, $\mathcal{B}(\Delta', \gamma)$ を定める．

- $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$ に対し，線形写像 $v_\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ を $v_\sigma(\alpha_j) := w_j$ $(j \in \sigma)$ で定義する．ただし，$(w_1, \dots, w_N)$ は $\mathbb{R}^N$ の標準的な基底である．

  また，平行多面体 $\left\{\sum_{j\in\sigma} t_j\alpha_j \,\middle|\, 0 \le t_j \le 1 \ (j \in \sigma)\right\}$ の体積を $\mu(\sigma)$ と記す．

  さらに，$G(\sigma) = (\oplus_{j\in\sigma}\mathbb{Z}\alpha_j)^* / (\mathbb{Z}^n)^*$ と定める．

- $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$, $j \in \sigma$ および $k \notin \sigma$ に対し，実数 c_{jk} を $\alpha_k = \sum_{j\in\sigma} c_{jk}\alpha_j$ で定める．

定理 2.4 ([24, 25])**.** $I = \{i \,|\, m_i > 0\}$, $J = \{i \,|\, m_i \le 0\}$, $\Delta' = (\alpha_i \,|\, i \in I)$, $M = m_1 + \cdots + m_N$ とする．また，$\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ と略記する．

(1) $\lambda \in \sum_{i=1}^{N} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ が $C(\Delta')$ のある chamber γ に属すとし，さらに $J \neq \emptyset$ のときは，$\lambda - \sum_{i \in J} l_i \alpha_i \in \gamma \quad (\forall l_i = 0, \ldots, |m_i|)$ と仮定する．このとき次が成り立つ．

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda, y; m) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \prod_{j \in \sigma} \binom{-\partial_j + m_j - 1}{m_j - 1} \times \left(\frac{e^{-\langle y, v_\sigma(\lambda) \rangle}}{\mu(\sigma)} \sum_{g \in G(\sigma)} \frac{e^{2\pi i \lambda}(g)}{\prod_{k \notin \sigma}(1 - e^{-2\pi i \alpha_k}(g) e^{-y_k + \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j})^{m_k}} \right).$$

(2) $h \in \sum_{i=1}^{N} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_i$ が $C(\Delta)$ のある chamber γ に属すとする．このとき次が成り立つ．

$$\mathcal{V}_\Delta(h, y; m) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \frac{1}{\mu(\sigma)} \prod_{j \in \sigma} \frac{(-\partial_j)^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} \left(\frac{e^{-\langle y, v_\sigma(h) \rangle}}{\prod_{k \notin \sigma}(y_k - \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j)^{m_k}} \right),$$

$$\mathcal{V}_\Delta(h; m) = \frac{1}{(M-d)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \frac{1}{\mu(\sigma)} \prod_{j \in \sigma} \frac{\partial_j^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} \left(\frac{\langle y, v_\sigma(h) \rangle^{M-d}}{\prod_{k \notin \sigma}(-y_k + \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j)^{m_k}} \right).$$

注意 2.5. すべての m_i が 1 のときは，いずれも Brion-Vergne [2] の結果である．またその場合，λ, h が γ の閉包 $\overline{\gamma}$ に属すときにも同じ公式が成立する．同様に，すべての m_i が正ならば，$\lambda, h \in \overline{\gamma}$ のときにも同じ公式が成立する．

系 2.6. 定理 2.5 (2) と 2.4 節の式から，$v_G(\vec{\lambda})$, $v_T(\vec{\lambda}, \mu)$ の表示式が得られる．

2.6. 超幾何関数論との関わり

$\mathbb{R}^n$ 内で，一般の位置にある超平面配置 $H_1, \ldots, H_N$ を考える．このとき，これらで囲まれた有界な領域はちょうど $\binom{N-1}{n}$ 個ある．$\mathbb{R}^n$ の座標を $(u_1, \ldots, u_n)$ とし，1 次式 $f_j = f_j(u_1, \ldots, u_n)$ を用いて H_j が $f_j = 0$ と表されているとする．座標変換を施すことにより，$f_1 = u_1, \ldots, f_n = u_n$ と仮定してよい．また，$j = n+1, \ldots, N$ に対し，$f_j = x_{0j} + x_{1j}u_1 + \cdots + x_{nj}u_n$ と表す．

$r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{Z}$ とし，$H_1, \ldots, H_N$ で囲まれた有界な領域 D に対し，

$$\begin{aligned} F_D &:= \int_D \prod_{j=1}^{N} \frac{f_j^{r_j}}{r_j!} du_1 \cdots du_n \\ &= \int_D \frac{u_1^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{u_n^{r_n}}{r_n!} \prod_{j=n+1}^{N} \frac{(x_{0j} + x_{1j}u_1 + \cdots + x_{nj}u_n)^{r_j}}{r_j!} du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

と定義する．ただし，r_j が負の場合は，2.2 節のように $f_j^{r_j}/r_j!$ はデルタ関数の導関数（に f_j を代入したもの）と解釈する．このとき，$F = F_D(x_{ij})$ は，次の (1)(2)(3) からなる超幾何方程式系 $E'(n+1, N+1; r)$（[1] 参照）の解になることが示される．

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = r_j F \qquad (j = n+1, \ldots, N)$

(2) $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{N} x_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = -(r_i+1)F \qquad (i=0,\dots,n)$

(3) $\displaystyle\frac{\partial^2 F}{\partial x_{ij}\partial x_{pq}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_{iq}\partial x_{pj}} \qquad (i,p=1,\dots,n,\ \ j,q=n+1,\dots,N)$

またこの方程式系は，Gelfand-Kapranov-Zelevinsky により導入されたGKZ方程式系 ([15] 参照) としても表される．次が成り立つ．

命題 2.7 ([26])**.** $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r_{n+1},\dots,r_N \in \mathbb{Z}_{>0}$ と仮定する．このとき，$\{F_D\}$ は超幾何方程式系 $E'(n+1,N+1;r)$ の解空間の基底になる．

注意 2.8. 超幾何関数論においては，$r_i \notin \mathbb{Z}$ のときを考えることが多いようである．その場合，積分範囲 D を「ツイスト・サイクル」に修正することにより F_D を定義する．F_D は一般化された超幾何関数あるいはグラスマン多様体上の超幾何関数と呼ばれる ([1] 参照)．

さて，必要ならば f_i を $-f_i$ に取りかえて，有界な領域 D が

$$u_1 \geq 0,\dots,u_n \geq 0, \quad f_j \geq 0 \ \ (j=n+1,\dots,N)$$

で表されるとする．$d=N-n$ とし，$\mathbb{R}^d$ において

$$\alpha_i = (-x_{i\,n+1},\dots,-x_{i\,N}) \ \ (i=1,\dots,n), \ \ \alpha_{n+1}=(1,0,\dots,0),\dots,\alpha_N=(0,\dots,0,1),$$
$$h=(x_{0\,n+1},\dots,x_{0\,N})$$

とおく．さらに $m_i = r_i+1 \quad (i=1,\dots,N)$ とする．このとき，F_D はvolume function $\mathcal{V}_\Delta(h;m)$ に一致する．

定理 2.9 ([26])**.** $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}$ に対し，F_D は定理2.4(2)の第二式の形に表示される．

F_D は x_{ij} の有理関数で，特に $x_{0\,n+1},\dots,x_{0N}$ の多項式になる．その性質は興味深い．

参考文献

[1] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.

[2] M. Brion and M. Vergne, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 797–833.

[3] C. De Concini and C. Procesi, *Topics in Hyperplane Arrangements, Polytopes and Box-Splines*, Springer, 2011.

[4] I. M. Gelfand and A. V. Zelevinskij, *Algebraic and combinatorial aspects of the general theory of hypergeometric functions*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 183–197.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), 515–538.

[6] V. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Springer, 1999.

[7] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Second Ed.*, Springer-Verlag, 1983.

[8] L. C. Jeffrey, *Extended moduli spaces of flat connections on Riemann surfaces*, Math. Ann. **298** (1994), 667–692.

[9] L. C. Jeffrey and F. C. Kirwan, *Localization for nonabelian group actions*, Topology **34** (1993), 291–327.

[10] 柏原正樹・河合隆裕・木村達雄, 代数解析学の基礎, 紀伊國屋数学叢書 **18**, 1980.

[11] F. C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes **31**, Princeton Univ. Press, 1984.

[12] A. Knutson, *Weight varieties*, MIT Ph.D. thesis (1996).

[13] S. K. Martin, *Transversality theory, cobordisms, and invariants of symplectic quotients*, arXiv:math/0001001.

[14] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, 3rd ed., Springer, 1994.

[15] M. Saito, B.Sturmfels and N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Algorithms and Computation in Mathematics **6**, Springer, 2000.

[16] T. Springer, *Invariant theory*, Springer LNM **585**, 1977.

[17] T. Suzuki, *Symplictic volumes of double weight varieties associated with $SU(3)$, I*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

[18] T. Suzuki, *Symplictic volumes of double weight varieties associated with $SU(3)$, II*, preprint, 2013.

[19] T. Suzuki and T. Takakura, *Symplectic volumes of certain symplectic quotients associated with the special unitary group of degree three*, Tokyo J. Math. **31** (2008), 1–26.

[20] T. Suzuki and T. Takakura, *Asymptotic dimension of invariant subspace in tensor product representation of compact Lie group*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 921–969.

[21] T. Suzuki and T. Takakura, *Symplictic volumes of double weight varieties associated with $SU(3)$, III*, in preparation.

[22] T. Takakura, *Intersection theory on symplectic quotients of products of spheres*, Internat. J. of Math. **12** (2001), 97–111.

[23] T. Takakura, *On asymptotic partition functions for root systems*, In: Toric Topology (eds. M. Harada, Y. Karshon, M. Masuda, and T. Panov), Contemp. Math. **460**, Amer. Math. Soc., 2008, pp. 339–348.

[24] T. Takakura, *On vector partition functions with negative weights*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

[25] T. Takakura, *Formulas for vector partition functions with negative weights*, in preparation.

[26] T. Takakura, *On hypergeometric integrals with integral exponents*, preprint, 2013.

[27] 脇本実, 無限次元 Lie 環, 岩波講座現代数学の展開, 1999.

[28] E. Witten, *On Quantum Gauge Theories in Two Dimensions*, Commun. Math. Phys. **141** (1991), 153–209.