

これまでの研究成果

阿蘇 愛理

ねじれアレキサンダー多項式は古典的な結び目の不変量であるアレキサンダー多項式の一般化であり、結び目とその補空間の基本群の表現に対して定義される。ねじれアレキサンダー多項式は 1990 年代に Lin によって導入され [1], 和田によって有限表示群に対しても定義された [2]。ねじれアレキサンダー多項式を用いることで、樹下・寺阪結び目と Conway の 11 交点の結び目のようなアレキサンダー多項式では区別できない 2 つの結び目を区別できることが和田によって示されている [2]。

一般には、結び目 K のねじれアレキサンダー多項式と結び目の種数およびファイバー性に関係があることが知られている。つまり、結び目 K に対して任意の $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の非可換な $SL(2, \mathbb{F})$ -表現 $\rho: \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow SL(2, \mathbb{F})$ に関するねじれアレキサンダー多項式 $\Delta_{K, \rho}(t)$ の次数 (すなわち、最高次と最低次の次数の差) は結び目の種数を用いて抑えることができ、ファイバー結び目に対してはモニック多項式になることが知られている [3]。

結び目が双曲結び目であるとは、その補空間が有限体積の完備双曲構造を許容することである。双曲結び目に対しては、ホロノミー表現と呼ばれる自然な表現が存在する。双曲結び目の種数およびファイバー性をこの表現に関するねじれアレキサンダー多項式により決定できることが、Dunfield–Friedle–Jackson によって予想されている (以下、予想 A と呼ぶ) [4]。

私は $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目と呼ばれる有名な結び目の無限族に対して、ホロノミー表現を含む表現の族に関するねじれアレキサンダー多項式を計算し、前述の予想 A が成立していることを確認した [5]。その後、 $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目や 2 橋結び目と呼ばれる結び目の無限族を含む、より一般の結び目の無限族であるトンネル数が 1 のモンテシノス結び目に対しても研究を行った [6]。トンネル数が 1 のモンテシノス結び目は 3 つの場合に分けることができ、1 つ目の 2 橋結び目や 2 つ目の $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目を含む結び目の無限族に対しては、ねじれアレキサンダー多項式の次数および最高次の係数を求め、これらの場合の予想 A をホロノミー表現に関する条件に帰着させた。また、3 つ目の結び目の無限族に対しては、 $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目の場合と同様にねじれアレキサンダー多項式を求め、予想 A が成立していることを確認した。

ねじれアレキサンダー多項式のその他の応用として、双曲体積との関係が知られている。3 次元のカスプ付き双曲多様体に対し、そのライデマイスター・トーシンの漸近挙動に双曲体積が現れることが Menal-Ferrer–Porti によって示され [7], 結び目のねじれアレキサンダー多項式とライデマイスター・トーシンの関係が北野 [8] と山口 [9] によって示されている。それらを用いて、合田が双曲結び目のホロノミー表現に付随する $SL(n, \mathbb{C})$ -表現 ρ_n に関するねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動 ($n \rightarrow \infty$) に双曲体積が現れることを示した [10]。さらに、Park はライデマイスター・トーシンの双曲体積の関係の一般化を与え、その得られた関係の複素化に複素体積が現れることを予想した [11]。ここで、双曲多様体 M の複素体積 $cv(M)$ は、 M の双曲体積 $Vol(M)$ とチャーン・サイモンズ不変量 $cs(M)$ を用いて $Vol(M) + 2\pi^2 cs(M)\sqrt{-1}$ で定義される。

私は最近の研究で、合田の与えた式の複素化を考えるために、6 交点以下の双曲結び目 K に対して ρ_n に関するねじれアレキサンダー多項式 $\Delta_{K, \rho_n}(1)$ の漸近挙動を調べ、等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi \log \Delta_{K, \rho_n}(1)}{n^2} = cv(S^3 \setminus K)$$

が成り立つことを予想した。実際、6 交点以下の双曲結び目に対しては、左辺の n を大きくしていくにつれて、結び目補空間の複素体積 $cv(S^3 \setminus K)$ に近づくことを確認した。

参考文献

- [1] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin., **17** (2001), 361–380.
- [2] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology, **33** (1994), 241–256.
- [3] T. Kitano and T. Morifuji, *Divisibility of twisted Alexander polynomials and fibered knots*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. IV (2005), 179–186.
- [4] N. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math., **21** (2012), 329–352.
- [5] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of $(-2, 3, 2n+1)$ -pretzel knots*, Hiroshima Math. J., **50** (2020), 43–57.
- [6] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of tunnel number one Montesinos knots*, to appear in Kobe Math. J. (arXiv:2008.00875.)
- [7] P. Menal-Ferrer and J. Porti, *Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds*, J. Topol. **7** (2014), no. 1, 69–119.
- [8] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 431–442.
- [9] Y. Yamaguchi, *A relationship between the non-acyclic Reidemeister torsion and a zero of the acyclic Reidemeister torsion*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 1, 337–362.
- [10] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Jpn. Acad. Ser. A **93** (2017), 61–66.
- [11] J. Park, *Reidemeister torsion, complex volume and the Zograf infinite product for hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Topol. **23** (2019) 3687–3734.