

これまでの研究成果

綾野孝則

楕円関数は 19 世紀の数学の主要な研究対象であり、これまでに具体的で美しい理論が構築されています。それ故、様々な分野で活用され、数学や科学の発展に大きく貢献してきました。一方、科学技術の発達により、一般の代数曲線に付随するアーベル関数(楕円関数を多変数に拡張した関数)を様々な分野で活用する動きも出てきています。

アーベル関数論で重要な役割を果たすのがシグマ関数です。Weierstrass によって定義され、詳しく調べられた楕円シグマ関数は、F. Klein 等によって、超楕円曲線に付随する多変数のシグマ関数に拡張されました。さらに 100 年程前に H. F. Baker によって、超楕円曲線のシグマ関数の理論は大きく発展しました。近年になって、V. Buchstaber、V. Enolski、D. Leykin らの画期的な研究により急速に発展し、平面 telescopic 曲線と呼ばれる曲線にまでシグマ関数は拡張されました。本研究では、一般の telescopic 曲線にまでシグマ関数を一般化しました(論文リスト 1-7)。また、アーベル関数論において有名なヤコビの逆問題の公式を telescopic 曲線にまで一般化しました(論文リスト 1-6)。

楕円曲線上の有理関数体は代数的な対象であり、体の構造(生成元とその間の関係式)を決定することができます。それをアーベル・ヤコビ写像で移すことで、解析的な対象である楕円関数体の構造を決定することができます。Baker らは、この手法を超楕円曲線に拡張し、超楕円曲線のアーベル関数体の構造を決定しました。本研究では、種数 3 の超楕円曲線に対して、 $\mathbb{C}^3$ 全体ではなく、シグマ関数の零点集合上で周期的になるような $\mathbb{C}^3$ 上の有理型関数全体(シグマ因子上の有理型関数体)という新しいクラスの関数体を定義し、上の手法を用いて、体の構造を決定しました(論文リスト 1-5)。その応用として、この新しいクラスの関数で解が書ける可積分方程式を導出しました(論文リスト 1-4)。これは、KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています。

種数 2 の超楕円積分の逆関数の級数展開の係数に関する漸化式を導出しました。曲線のパラメータの連続的な変形で種数 2 の曲線を楕円曲線に退化させたとき、その逆関数は Weierstrass の $\wp$ 関数に収束することを示しました(論文リスト 1-3)。これにより、曲線の退化とそれに伴うアーベル関数の退化に関する新たな関係が明らかになりました。

$f(x)$ を 5 次の多項式、 V を $y^2 = f(x)$ で定義される種数 2 の曲線、 $\sigma(u)$ を V に付随するシグマ関数とします。アーベル・ヤコビ写像を通して、 V 上の有理関数 y は、 σ を用いて構成される $\mathbb{C}^2$ 上のある有理型関数 F, G と同一視できます。このことから、 $\mathbb{C}^2$ 上で $F - G = \sigma H$ となるような有理型関数 H が存在します。本研究では、 H を σ とその偏微分を用いて具体的に書き下しました(論文リスト 1-3)。多変数複素関数論において、多変数の有理型関数を 2 つの有理型関数の積に分解するという問題は、重要な問題です。本研究では、アーベル関数の理論を用いて、この問題に対する非自明な例を与えました。

楕円関数はアーベル関数の中で最も簡単で扱いやすいため、微分方程式のアーベル関数による解が得られたとき、それを楕円関数で表示できれば有用です。本研究では、種数 2 の超楕円曲線 V からある楕円曲線への次数 2 の射が存在するとき、 V に付随するアーベル関数を Weierstrass の楕円関数で表示する公式を与えました(論文リスト 1-1)。これにより、KdV 方程式の Weierstrass の楕円関数による解が得られました。