2. 今後の研究計画

将来の研究計画を 3 つの課題に分けて概説する．

2.A. 飯高予想の研究　1.A-i に述べた飯高予想の研究を続ける．前述したように正標数では不等式 (I) が成り立たないため，より弱い不等式

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa'(\overline{G}) \tag{I'}$$

も扱う．ここで $\overline{G}$ は幾何学的生成ファイバー，$\kappa'(\overline{G})$ はその Luo [6] の意味での小平次元であり，$\overline{G}$ が非特異であれば古典的な定義と同値 ($\kappa'(\overline{G}) = \kappa(\overline{G})$) となる．標数 0 では $\kappa'(\overline{G}) = \kappa(G)$ であり正標数では $\kappa'(\overline{G}) \leq \kappa(G)$ のみ成り立つ．また Viehweg [8] は標数 0 の場合に，$\kappa(Y) \geq 0$ ならば

$$\kappa(X) \geq \mathrm{Max}\,(\kappa(Y), \mathrm{Var}(f)) + \kappa(G) \tag{V}$$

が成り立つと予想した．これは不等式 (I') にファイバーの変動 $\mathrm{Var}(f)$ を加味して評価を良くしたものである．本研究の目標は不等式 (I) 及び (I'), (V) がそれぞれいつ成立するかを明らかにすることである．特に以下の 3 つの場合に比重を置く．

2.A-i. 底空間 Y が極大 Albanese 次元である場合　非特異射影多様体 X の Albanese 射は像の上で非分離であれば X を全空間とした代数的ファイバー空間で底空間が極大 Albanese 次元を持つものを誘導する．そのため本研究で得られた成果は非自明な Albanese 射を持つ非特異射影多様体 X のクラスの研究を発展させると期待できる．またこの場合の飯高予想は標数 0 では Cao–Păun [2] の結果により肯定的に解決されたが，その証明は解析的な手法に依存している．代数的な解決に向けた新たな知見を与えるという観点からも，正標数における解決は有意義である．

2.A-ii. 幾何学的生成ファイバー $\overline{G}$ が一般型 ($\dim \overline{G} = \kappa(\overline{G})$) かつ非特異である場合　この場合は標数 0 では Kollár [5] により証明された．これまでの研究では正値性定理と Y に仮定した特殊な性質を組み合わせることで飯高予想を証明してきたが，この研究では Y が任意の非特異射影多様体である場合に解決することを目指す．

2.A-iii. 底空間 Y が一般型 ($\dim Y = \kappa(Y)$) である場合　この場合は Viehweg [8] の議論により $f_*\omega_{X/Y}^m$ の弱正値性についての研究 (2.B) に帰着される．

2.B. 正値性定理の研究　1.A-i に述べた相対多重標準層 $f_*\omega_{X/Y}^m$ や多重標準層 $f_*\omega_X^m$ の正値性についての研究を継続し，より広い代数的ファイバー空間のクラスにおいて正値性定理を確立することが本研究の目的である．正値性定理は飯高予想の他にモジュライの問題にも応用される重要な定理である．具体的な研究目標は，既存の結果で仮定されている幾何学的生成ファイバー $\overline{G}$ や生成ファイバー G の大域的な性質に関する条件を外すことである．これまでの研究 ([業績 7, Theorem 1.1], [業績 5, Theorem 1.4]) を鑑みれば，$\overline{G}$ が穏やかな特異点のみを持つ場合には相対標準束や標準束の十分大きい冪の順像層がある種の正値性を持つことが期待される．また $f_*\omega_{X/Y}^m$ や $f_*\omega_X^m$ の部分層が持つ正値性についても調べる．応用上は弱正かつ非自明な部分層の存在を示すだけでも十分に強力である．

2.C. 標準束公式の研究　標準束公式は小平 [4] による楕円曲面の研究の中で確立されて以来，標数 0 において様々な形に一般化，高次元化され，多くの場面で活用されてきた．本研究では Ambro [1] による以下の形の標準束公式を考える：

問題：$K_{X/Y} \sim_{\mathbb{Q}} f^*L$ を満たす Y 上の $\mathbb{Q}$-因子 L の存在を仮定する．このとき，$L \sim_{\mathbb{Q}} \Delta_Y$ かつ組 (Y, Δ_Y) は "穏やかな" 特異点しか持たないような有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ_Y が存在するか？

ここで $\sim_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-線型同値（ある $m > 0$ で両辺の m 倍が線型同値）を表す．この問題が肯定的に解決されれば，例えば本研究で示した正値性定理 ([業績 7, Theorem 1.1], [業績 10, Theorem 1.3]) や飯高不等式 ([業績 7, Theorem 1.4], [業績 10, Theorem 1.5])，またはその証明で用いた技術を，相対半豊富な ω_X を持つ代数的ファイバー空間のクラスに適用することができる．これまでの研究により $\overline{G}$ が F 純特異点のみを持つ場合は $K_{X/Y} \sim_{\mathbb{Q}} f^*L$ を満たす Y 上の $\mathbb{Q}$-因子 L は擬有効であることまでは証明された ([業績 5, Theorem 1.4])．さらに $\overline{G}$ が大域的 F 分裂であれば擬有効より強く $\kappa(L) \geq 0$ であることも示されている ([業績 7, Theorem 3.17])．本研究ではまず「$\overline{G}$ が大域的 F 分裂」という仮定を外して $\kappa(L) \geq 0$ を証明することを中間目標とし，それから $\Delta_Y \sim_{\mathbb{Q}} L$ となる有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ_Y のなす組 (Y, Δ_Y) が持つ特異点について調べ上問題の解決に挑む．

参考文献

[業績 1]$\cdots$[業績 10] は「(3) 論文リスト」から同番号の業績を引用した．それ以外の参考文献は以下の通り． [1] F. Ambro. The moduli *b*-divisor of an lc-trivial fibration. *Compos. Math.*, 141(2):385–403, 2005. [2] J. Cao and M. Păun. Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over Abelian varieties. *Invent. Math.*, 207(1):345–387, 2017. [3] Y. Kawamata. Characterization of abelian varieties. *Compos. Math.*, 43(2):253–276, 1981. [4] K. Kodaira. On compact analytic surfaces: Ⅱ. *Ann. of Math.*, 77(3):563–626, 1963. [5] J. Kollar. Subadditivity of the Kodaira dimension: fibers of general type. *Adv. Stud. in Pure Math.*, 10:361–398, 1987. [6] Z. Luo. Kodaira dimension of algebraic function fields. *Amer. J. Math.*, 109(4):669–693, 1987. [7] M. Popa and C. Schnell. On direct images of pluricanonical bundles. *Algebra Number Theory*, 8(9):2273–2295, 2014. [8] E. Viehweg. Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fiber spaces. In Algebraic Varieties and Analytic Varieties, pages 329–353. Kinokuniya, North-Holland, 1983.