(2) これまでの研究成果のまとめと今後の研究計画

江尻 祥

2021 年 12 月 29 日

1. これまでの研究成果のまとめ

1.A. 代数的ファイバー空間についての研究 ([業績 5,6,7,9,10]) 本研究では代数的ファイバー空間，すなわち代数閉体 k 上定義された非特異射影多様体間の分離的な全射であって既約な一般ファイバーをもつものを調べた．

1.A-i. 飯高予想と弱正値性定理について ([業績 6,7,10]) 飯高は基礎体 k の標数が 0 の場合に，代数的ファイバー空間 $f : X \to Y$ の全空間 X，生成ファイバー G 及び底空間 Y の小平次元 κ について劣加法性

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(G) \tag{I}$$

が成り立つと予想した．小平次元は代数多様体の分類理論において鍵となる双有理不変量である．飯高予想はその帰結として川又 [3] の Abel 多様体の双有理的特徴づけなど重要な結果を多く含んでいる．予想を研究する上で手がかりとなるのは相対多重標準束の順像層 $f_*\omega^m_{X/Y}$ である．Viehweg[8] は $f_*\omega^m_{X/Y}$ が各 m で弱正であることを示し (弱正値性定理)，それを用いて飯高予想に部分解決を与えた．近年 Popa–Schnell[7] は相対版藤田予想の部分解決を与え，その帰結として弱正値性定理に別証明を与えた．本研究では弱正値性定理と Popa–Schnell の結果をそれぞれ**正標数に拡張**，すなわち基礎体 k の標数が正の場合に拡張し ([業績 7, Thm 1.1], [業績 10, Thm 1.3])，それを用いて飯高予想の部分解決を与えた ([業績 7, Thm 1.4],[業績 10, Thm 1.5])．特に，標数 7 以上かつ X が 3 次元の場合に飯高予想が正しいことを Lei Zhang 氏との共同研究で証明した ([業績 6, Thm 1.3])．また，Paolo Cascini 氏，János Kollár 氏，Lei Zhang 氏との共同研究により，正標数において不等式 (I) の反例を構成した ([業績 1])．

1.A-ii. 反標準因子の正値性について ([業績 5]) 反標準因子の正値性は多様体の幾何学的性質に深く関わる重要な概念である．代数的ファイバー空間 $f : X \to Y$ に対し，$-K_X$ の正値性とファイバーの性質から $-K_Y$ の正値性を調べることができる．まず f が射として滑らかな場合を考える．X が Fano 多様体 ($-K_X$ が豊富) ならば Y もそうであることが Kollár–宮岡–森により任意の標数で証明された．類似の議論からネフ性についても同様の主張が従う．藤野–權業は X が弱 Fano($-K_X$ がネフかつ巨大) のとき Y もそうであることを標数 0 で証明した．f が滑らかでない場合でも $-K_X$ がネフかつ巨大 (resp. ネフ) ならば $-K_Y$ は巨大 (resp. 擬有効) であることが標数 0 で示されている．本研究では上述した標数 0 の結果を**全て正標数へ拡張**し ([業績 5, Thms 1.1,1.3 and 4.1])，さらに Kollár–宮岡–森の結果を (任意標数の) 半安定射へ拡張した ([業績 5, Thm 5.8])．

1.A-iii. 相対反標準因子の正値性について ([業績 9]) Kollár–宮岡–森は代数的ファイバー空間 $f : X \to Y$ の相対反標準因子 $-K_{X/Y}$ は豊富ではないことを証明した．これは漸近的基点集合 $\mathbb{B}_+$ の概念を用いれば $\mathbb{B}_+(-K_{X/Y}) \neq \emptyset$ と表すことができる．本研究では標数 0 の場合に $\mathbb{B}_+(-K_{X/Y})$ の大きさを調べ，それが Y 上支配的であること，特に $\dim \mathbb{B}_+(-K_{X/Y}) \geq \dim Y$ となることを示した．なお，正標数の場合でも類似の証明により同様の主張が成り立つ．

1.B. 多様体の有理連結性について ([業績 2]) 以下では基礎体を標数 0の代数閉体とする．Campana と Kollár–宮岡–森は Fano 多様体の有理連結性，すなわち「任意の 2 点が 1 本の有理曲線に含まれる」という重要な性質を証明した．Hacon–M$^{\text{c}}$Kernan はこの結果を弱 Fano 多様体に拡張し，さらなる一般化を問題として提案した：

問題：非特異射影多様体 X の反標準因子 $-K_X$ がネフのとき，「$\kappa(-K_X)$ 以上の次元を持つ有理連結な X の閉部分多様体」の族が X の稠密開集合を覆うか？

本研究では權業善範氏と共同でこの問題に取り組み，弱正値性定理を用いて有理連結ファイブレーションを調べ，肯定的解決を与えた [業績 2, Thm 1.1]．

1.C. Abel 多様体の特徴づけについて ([業績 3,4]) ここでは X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された非特異射影多様体とし，X が Abel 多様体となるための必要十分条件を調べた．

1.C-i. $F^m_*\mathcal{O}_X$ の構造による特徴づけ ([業績 4]) 以下では K_X に擬有効性を仮定する．X について次の条件を考える：
条件 $(*)_m$：$F^m_*\mathcal{O}_X$ が直線束の直和に分解する．

X が通常 Abel 多様体ならば条件 $(*)_m$ は任意の m で成り立つ．この命題の逆について三内–田中 (公) が研究し，「無限個」の m で条件 $(*)_m$ が満たされるとき X は通常 Abel 多様体であることを証明した．本研究では「無限個」という仮定を外すことを目標に，1 つの m_0 で条件 $(*)_{m_0}$ が満たされる場合を調べた．これは三内顕義氏との共同研究である．結果として「$p \geq 3$」または「$p = 2$ かつ $m_0 \geq 2$」のとき X は通常 Abel 多様体であることを証明した [業績 4, Theorem 1.2]．

1.C-ii. Albanese 射による特徴づけ ([業績 3]) 本研究では正標数の場合に Albanese 射が代数的ファイバー空間を成すための十分条件を与えた ([業績 3, Theorems 1.1–1.3])．その系として通常 Abel 多様体は F 分裂性と等号 $b_1(X) = 2\dim X$ を満たす非特異射影多様体として特徴づけられることを示した．また他の応用として特殊な場合のアバンダンス予想を解決した ([業績 8])．