

今後の研究計画 (2022年4月～)

2022年3月29日
古谷賢朗

楕円型作用素の大域的な研究は多様体論と解析学に多くの深い知見をもたらした。今後の研究では、楕円型を含み主に劣楕円型作用素の大域的現象に関連する研究を行う予定である。Laplace-Beltrami 作用素や Dirac 作用素がそれぞれ多様体の幾何構造に自然に付随する 2 階楕円型作用素、1 階楕円型作用素であるのに対して、ここでは多様体の sub-Riemann 構造とそれに付随する 2 階劣楕円型微分作用素が研究の中心の一つである。この幾何構造 (= sub-Riemann 構造) は接束に bracket 生成的な部分束の存在を仮定している。その対極の構造である葉層構造については古くから研究されているが、多様体論と密接に関連した幾何学的解析学的な研究がこれまで未開拓であることも研究するに十分意義があると考えている。

接触多様体やベキ零 Lie 群及びそのベキ零多様体はその構造を持つ多様体の代表例であり、Riemannian submersion の全空間はその両方の構造を持つ場合がしばしばあり研究対象は豊富である。又葉層構造の場合は、横断的楕円型作用素の概念は定義出来るが、解析的側面から見ると構造を直接反映した微分作用素は存在しない。一方、sub-Riemann 多様体上には構造の性質を反映した 2 階劣楕円型微分作用素 (= sub-Laplacian) が存在し、その意味でも Riemann の場合の Laplacian との対比においても研究するに値すると考えている。この作用素は Hörmander による sub-elliptic estimate (劣楕円型性) を満たすので、スペクトルの基本構造は楕円型と同じであるが、特性多様体が存在することより従来の位相的レベル (K -理論) の枠組みだけではない新たな現象の可能性や、古典的によく知られた多様体が非自明なこの構造を持つかの研究も含め、解析的には Laplacian の持つ性質の類似の研究 (例えば、Weyl law の証明や熱核構成等) も多々あり、その困難さの中に楕円型作用素には見られない現象の更なる探究を行う。

2020 年度に引き続き今年度も現在までコロナ禍で予定していた共同研究者の招聘が出来なかったが今年度こそは実現出来ることを期待し、又は自身が訪問・滞在 (ドイツ、ノルウェー、デンマーク) し共同研究が出来ることが期待している。

より具体的には、昨年に引き続き科研費研究題目「楕円型作用素から劣楕円型作用素へ」(20K03662) に従いおうよそ以下の研究 (a) ~ (c) を予定している:

(a) ベキ零 Lie 群及びそのベキ零多様体は良い (= equi-regular) sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例である。その中で Clifford 代数に付随するベキ零 Lie 環 (= pseudo H-type Lie 環) の基本的な性質 (Lattice の存在、分類、自己同型群の決定) の研究を行ってきた。次に uniform discrete subgroup の実現と分類をコロナが終息し渡航が可能になればノルウェーの共同研究者とで完成する計画である。又この compact nil-manifolds の Laplacian、sub-Laplacian の spectral zeta 関数の留数に関わるより具体的な研究を行う。

(b) A. Weinstein の Eigenvalue Theorem の sub-Laplacian version が成り立つはずであると予想していて、完全な証明を一応の形では得たが、一般論でなくその場合の Maslov 量子化条件を満たす様々な Lagrangian submanifold の例を見つける。より具体的には、sub-Laplacian の陪特性流が完全積分可能でないときを主に扱い、トーラス以外のいろいろな Lagrangian submanifold を見つけることを目標にする。

同時に Radon 変換を Fourier 積分作用素論の枠組みでの研究を始めたところである。この問題は (d) の問題の具体例とも密接に関係することが最近分かってきた。

(c) Conic singularity を持つ多様体上の sub-Laplacian の研究を symbolic calculus の視点から始めたが、コロナ禍共同研究者との議論をする機会が持てずこの一年は進展がなかったので可能な限り進展に努めたい。

(d) Lie 群は不変 sub-Riemann 構造を持っているが、特に compact 対称空間がいつも sub-Riemann 構造を持つかは一般的には不明である。本研究では対称空間に対して Lie 環構造を通じて構成可能な sub-Riemann 構造の存在を個別に調べ、出来れば分類も試みるが、上記の研究に時間が取られれば本格的には次年度以降になる。