

今後の研究計画

濱本直樹

email: g00glyoe@gmail.com

論文 [2, 8, 4] および [9] では、渦なし場やソレノイダル場のスカラーポテンシャルによる表現公式が本質的に重要な役割を果たし、それが Hardy 及び Rellich 不等式の最良定数の改良に関する最小化問題を解決可能にしている。この手法は他にも多くの Hardy 型関数不等式の解析に応用できる可能性がある。とくに、以下のトピックについての研究をより一層進めていきたい。

- ベクトル場に対する Hardy 型不等式両辺の積分量の差を評価する補正項は、最良定数の達成可能性について本質的な情報を含んでいる。この補正項を、ある意味で最良な形で得ることを 1 つの目標とする。
- Hardy 不等式と Rellich 不等式の間と見なされる Rellich-Hardy 不等式は、Tertikas-Zographopoulos によって重み付きのバージョンで示された。論文 [11] のような渦なし場については勿論のこと、ソレノイダル場に対する最良定数の改良について調べたい。
- これまでの研究で扱ってきた Hardy-Leray 不等式は L^2 型のみであったが、 $p \neq 2$ に対する L^p 型の最良 Hardy-Leray 不等式についても、渦無しもしくはソレノイダル条件による最良定数の改良が考えられる。 $p \neq 2$ の場合は従来の球面調和関数展開による方法が全く通用しないため、最良定数の計算は非常に難しいが、再配列理論の軸対称版を構築することから始めるアプローチを模索中である。
- これまでの研究では全空間上でのベクトル場を扱ってきたが、半空間上のベクトル場についても、トレース補正項付き Hardy-Leray 不等式が Kato の不等式として知られている。この不等式のテストベクトル場に渦無しもしくはソレノイダル条件を課せば最良定数がどのように変更されるのかを検討していきたい。
- Heisenberg の不確定性不等式について、ソレノイダル場に対する最良定数の値が論文 [10] で計算された。この不等式と Hardy 不等式は Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式に含まれており、制約条件付きベクトル場に対する最良定数の計算がすべての重み指数について可能かどうかを検討していきたい。

不等式の最良性はその Euler-Lagrange 方程式と密接に関係しているため、現行の研究を Navier-Stokes 方程式のような偏微分方程式論に応用する可能性についても模索する。ソレノイダル条件による不等式の改良によって弱解の存在を導いた Leray の方程式論について、何らかの新展開が得られることが期待される。