研究成果

私はこれまで、(1) L^p-Lyapunov 不等式に関連する問題、(2) Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題、(3) 変数指数型 Lebesgue 空間への Sobolev 埋め込みのコンパクト性に関する問題、(4) Trudinger-Moser 不等式に関連する諸問題、の 4 つの研究を行ってきた。特に、(1)、(2)、(4) について詳細に述べる.

(1) L^p-Lyapunov 不等式に関連する問題

L^p-Lyapunov 不等式は線形の楕円型方程式における可解性の必要条件である。この問題は Sobolev 埋め込みと非常に深く関連しており、線形の問題にも関わらず、非線形の問題と非常に強い関係性を持っている。Neumann 境界条件の問題において、現在まで臨界と呼ばれる部分が未解決のまま残っていたが、対応する Sobolev 埋め込みの最良定数に関する最小化関数の存在を証明することにより、部分的にではあるが解決することができた。関連する問題として、非線形 Neumann 型と呼ばれる境界条件に関する同様の問題も考察し、高橋太氏（大阪市立大学）との共同研究により、非線形 Neumann 境界条件型 L^p-Lyapunov 不等式も導出することに成功した。

(2) Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題

Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題に関して、Neumann 型と呼ばれる境界条件を課さない Sobolev 空間における問題を研究した。Sobolev 空間から重み付き Lebesgue 空間への埋め込みを考察するこの問題では、重み関数の特異点が領域の境界にあり、かつその点での平均曲率が正の場合に最小化関数は存在する、という結果のみが先行研究としてあった。特異点が領域の内部にある場合、または境界にあり、その平均曲率が非正の場合は未解決であった。この未解決の部分の問題を研究し、これらの問題に関しては、特異点の位置、平均曲率の他に、領域のスケールが最小化関数の存在・非存在に影響を与えていることを示した。具体的に、4 次元以上で、スケールに関するパラメータを導入し、そのパラメータがある閾値よりも小さいと最小化関数は存在し、超えると最小化関数は存在しない、という結果である。この最小化関数の存在・非存在の結果、特に非存在の結果は先行研究では見ることができなかった現象であり、原点の位置、平均曲率、加えて領域のスケールが最小化問題の達成可能性の本質であることを示した。この結果を踏まえて、関連する非線形楕円型方程式の可解性、解の性質に関する研究を、国立台湾大学の C.-H. Hsia 氏、G. Hwang 氏と共に行った。

(4) Trudinger-Moser 不等式に関連する諸問題

Trudinger-Moser 不等式に関する変分問題の研究を行った。変分問題に関して、Trudinger-Moser 型汎関数は低階の摂動項を暗に含み、この摂動項の影響により最大化関数が存在するということも明らかにされている。しかしながら、実際に摂動項を取り除いた汎関数を考えた場合に最大化関数が非存在となるか否か、という研究は行われていなかった。この問題に関して、実際に最大化関数は非存在となるということを示し、摂動項が最大化関数の存在・非存在と本質的に関係があるということを示した。また、原点近傍及び無限遠方の振る舞いのみを仮定したより一般的な摂動項においても最大化問題を考察し、その振る舞いと最大化関数の存在・非存在との関係を明らかにした。

この 1 年は Trudinger-Moser 型非線形項を持つ楕円型方程式の解の定性的研究を行った。Sobolev 空間のノルムが一定という制約条件の下、Trudinger-Moser 型汎関数における臨界点の定性的研究を行った。まず、指数が十分小さいときに正値臨界点が一意であるという結果を得、その後、領域のスケールをパラメータとみた際の臨界点の漸近挙動に関する結果を得た。