これまでの研究成果のまとめ

これまでの私の研究分野は保型形式・保型表現である。特に、重さ半整数の保型形式とメタプレクティック群の表現について研究してきた。

＜動機と背景＞

保型形式とは、複素上半平面上の正則関数であって適当な対称性をもつものをいう。保型形式やその L 関数を調べることは、整数に関する多くの問題に解を与えることにつながり、古くから整数論分野の主要な目標のひとつとなっている。さて、保型形式には重さというデータがある。整数論において考えるのは重さが整数または半整数（※奇数割る 2 の形の有理数を半整数という。）のふたつのケースであり、これらは互いに補い合うように重要なものだ。しかし、重さ整数と比べて重さ半整数の保型形式の理論は歴史が浅い

保型表現とは、アデール化した代数群の表現であり、保型形式を抽象化した対象である。例えば、重さ半整数の保型形式はメタプレクティック群$\mathrm{Mp}(2n)$の保型表現で理解できる。保型表現は局所体上の群の表現の積に分解できて、これら大域・局所の表現は不可分の関係にある。

重さ半整数の保型形式の理論では、志村五郎氏の研究とそれを受けた Waldspurger の研究が代表的だ。志村氏は重さ半整数の保型形式と重さ整数の保型形式の間の関係を記述する革新的な理論を発表した。それを受け、Waldspurger はメタプレクティック群$\mathrm{Mp}(2)$と特殊直交群$\mathrm{SO}(3)$の保型表現の間の対応を記述した。そして本分野において、近年重要な進展が二つあった。ひとつは Gan-Savin によって局所体上においてメタプレクティック群$\mathrm{Mp}(2n)$と奇数次特殊直交群$\mathrm{SO}(2n+1)$の表現の間の自然な対応が構成されたこと、もうひとつは、Gan-市野が$\mathrm{Mp}(2n)$と$\mathrm{SO}(2n+1)$の保型表現の間の対応を記述したことだ。言い換えると、これらは$\mathrm{SO}(2n+1)$の表現の分類定理を仮定したうえで$\mathrm{Mp}(2n)$の表現の分類定理を証明したのだ。

＜私のこれまでの研究について＞

$\mathrm{Mp}(2n)$の局所絡関係式

Gan-Savin の結果を踏まえて、非アルキメデス局所体上で$\mathrm{SO}(2n+1)$の局所絡関係式から$\mathrm{Mp}(2n)$の局所絡関係式を導くことに成功した([Is1])。局所絡関係式とは、放物誘導表現（放物部分群からの誘導表現）の自己同型である自己絡作用素と呼ばれる作用素が、その誘導表現の既約部分表現にどのように作用するかを記述する関係式だ。表現の分類は放物誘導表現を用いてなされるため、局所絡関係式は表現のより詳細で具体的な分類を与えるものである。

Gan-Savin の結果は「テータ対応」という、異なる群の表現を結びつける対応を応用している。またこの分野には、テータ対応と自己絡作用素の整合性を確かめる「混合モデル」という理論がある。私はこの混合モデルを逆に利用してこの課題を解決した。

伊吹山予想

Gan-市野の結果を応用して重さ半整数の保型形式に関する「伊吹山予想」という長年未解決だったいくつかの重要な予想を証明した（[Is2]）。この予想は、重さ半整数と重さ整数の保型形式の関係づけを与えるもので、志村五郎氏の研究を次数 2 に引き上げたような形になっている。

保型表現の理論を重さ整数の保型形式の研究に応用する手法はよく知られていた。しかし私はこの課題で、重さ半整数のときには 2 が「悪い素数」になるために一筋縄ではいかないことを発見した。そして、ヤコビ群という別の群の表現論を併せて応用することでこの問題をクリアできるということを明らかにした。伊吹山予想そのものの価値はもちろんのこと、Gan-市野の理論を重さ半整数の保型形式の研究に応用する手法を示したという意味でも価値のある研究である。