

今後の研究計画

私は表現論的な操作や性質を Langlands パラメータを経由して調べる事に興味を持っている。今後、このテーマにおける強力な道具となる**局所テータ対応に対する Prasad 予想**について研究する計画である。これは Langlands パラメータを用いて局所テータ対応を記述するという予想である。局所テータ対応を用いると、ある群における操作を別の群における操作に関連づける事ができるので、Prasad 予想を用いれば問題を別の群へ“移して”考察する事ができる。本研究では特に四元数ユニタリ群からなる簡約相対ペアを扱う。四元数ユニタリ群の Langlands パラメータを扱うためには近年確立された Kaletha の rigid 内部形式の理論を本質的に用いる必要があり、パラメータ側の記述は四元数的でない場合と同様にはできない。従って本研究の目的は、四元数ユニタリ群からなるペアに対する Prasad 予想の適切な定式化とその証明である。また、その応用として既約表現の制限を Langlands パラメータを用いて調べる研究にも取り組みたい。

(1) Prasad 予想. F を標数 0 の局所体, (G, H) をランクが等しいか殆ど等しい簡約相対ペアとし, $\psi: F \rightarrow \mathbb{C}^1$ を非自明加法指標とする。 $G(F)$ の既約表現 π が緩増加で局所テータ対応 $\sigma = \theta_\psi(\pi, H)$ が 0 でない時, π の L-パラメータは σ の L-パラメータを用いて表すことが出来る。従って局所テータ対応は L-パッケージ (の和集合) の間の対応を定義する。さて, Kaletha の rigid 内部形式の理論によれば, ある条件を満たす rigid 内部形式 z に対して, 埋め込み $\iota: \Pi_\phi(G(F)) \rightarrow \text{Irr}(S_\phi^+)$ が定義できる。ここで S_ϕ^+ は **S 群** と呼ばれる有限群である。Prasad は (G, H) が直交群-シンプレクティック群のペアまたはユニタリ群のペアの場合に, この対応が L-パッケージの S 群を用いて記述された構造を保つと予想した [Pra93][Pra00] (**Prasad 予想**)。この予想は Gan-Ichino [GI16], Atobe [Ato18] によって示された。今後の研究では Prasad 予想を四元数ユニタリ群へ拡張する事を目標としている。ここで, 四元数ユニタリ群の場合は rigid 内部形式 z の取り方が一意とならない事が要因となり, Prasad 予想の定式化は四元数的でない場合に対するものから修正をする必要が発生する。

課題と計画. まず, どのような形の定理を目標としているか説明する。全射

$$\mathcal{P}(G) \rightarrow \text{Irr}(G(F)): u \mapsto \pi(u)$$

が存在するような集合 $\mathcal{P}(G)$ ($\text{Irr}(G(F))$) の“パラメータ”を適切に選ぶ。この時, グラフ

$$\Xi(\theta_\psi) \subset \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(H)$$

で次の条件を満たすものを明示的に構成することが出来れば Prasad 予想を拡張できたとと言える。

- $(u, u') \in \Xi(\theta_\psi)$ ならば $\theta_\psi(\pi(u), H) = \pi(u)$ が成り立つ。
- $\pi \in \text{Irr}(G(F))$ で $\theta_\psi(\pi, H) \neq 0$ が成り立つならば, $(u, u') \in \Xi(\theta_\psi)$ で $\pi(u) = \pi, \pi(u') = \theta_\psi(\pi, H)$ となるものが取れる。

私は現在この課題を $F = \mathbb{R}$ の場合に対して研究し, $\mathcal{P}(G)$ や $\Xi(\theta_\psi)$ の定式化について進展を得た。引き続き研究を行い定式化を完成させるとともに, 非アルキメデス的局所体に対しても研究を行いたい。低ランクの場合などの特殊な条件をつけるのであれば Arthur の重複度公式を用いて研究が可能である。一般の場合を扱うためには**局所絡関係式**を確立し, [Ato18] と同様に局所絡作用素と局所テータ対応の関係を調べる方針をとる必要があると考えられる。ここで局所絡関係式とは, Langlands パラメータの情報を絡作用素と言う表現論的な対象の固有値から取り出すことができるという性質であり, 四元数ユニタリ群に対してはまだ定式化されていない。局所絡関係式の確立にあたって最初の難所となる点は S 群の 1 次元でない表現も扱う点であるが, Arthur によって S 群の構造が詳しく調べられている ([Art13, Chapter 9]) ので, これらの事実を参考にしながら研究を進める計画である。

(2) 既約表現の制限の問題. F を局所体, G, H を F 上の連結簡約群とし, $H \subset G$ と仮定する。この時 $\pi \in \text{Irr}(G(F))$, $\sigma \in \text{Irr}(H(F))$ に対して $\text{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$ を調べたい。このような問題に対して, 局所テータ対応の **see-saw 等式**が使える状況である場合は別の群に移して調べる事ができる。例えば, 次の問題は Prasad 予想の応用として解決できる: D を F 上の四元数体, G を D 上の 2 次元エルミート空間のユニタリ群とし, H を G の部分群 $D^1 \times D^1$ とする時, $\pi \in \text{Irr}(G(F))$ と $\sigma \in \text{Irr}(D^1)$ に対して $\dim \text{Hom}_{H(F)}(\pi, 1 \boxtimes \sigma)$ を調べたい。この問題は See-saw 等式を用いれば, D 上の 2 次元歪エルミート空間のユニタリ群を G' と書く時, $G' \times G'$ の既約表現の対角成分 $\Delta G'$ への制限を調べる事と同値であることがわかる。一方, 偶然同型から G' での問題は D^1 や $\text{SL}_2(F)$ の問題に帰着できる。今後はこの問題やその一般化の模索等も行う予定である。

REFERENCES

- [Art13] James Arthur. *The endoscopic classification of representations*, volume 61 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. Orthogonal and symplectic groups.
- [Ato18] Hiraku Atobe. The local theta correspondence and the local Gan-Gross-Prasad conjecture for the symplectic-metaplectic case. *Math. Ann.*, 371(1-2):225–295, 2018.
- [GI16] Wee Teck Gan and Atsushi Ichino. The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence. *Invent. Math.*, 206(3):705–799, 2016.
- [Pra93] Dipendra Prasad. On the local Howe duality correspondence. *Internat. Math. Res. Notices*, (11):279–287, 1993.
- [Pra00] Dipendra Prasad. Theta correspondence for unitary groups. *Pacific J. Math.*, 194(2):427–438, 2000.