

これまでの研究成果のまとめ

私は局所体上の簡約群の表現論を研究している。これは保型形式と言われる数学的対象のなす表現 (**保型表現**) を局所理論からアプローチする分野である。ここで保型形式とは大域体 F 上で定義された簡約群 G の Adele 値群 $G(\mathbb{A}_F)$ 上のいくつかの性質を満たす関数である。今までの研究では特に**古典群** (シンプレクティック群, 特殊直交群, ユニタリ群, 四元数ユニタリ群) の表現論を扱った。ここで四元数ユニタリ群とは, F 上の四元数体 D を取る時, D -ベクトル空間上に定義される非退化 (歪) エルミート形式のユニタリ群として定義される代数群のことである。私は表現論的な操作や性質を Langlands パラメータを経由して調べる事に興味を持っている。まず, Langlands パラメータの重要な不変量である**局所因子**について研究を行い, 次にパラメータ側での計算を背景にもつ, 形式次数の局所テータ対応での振る舞いの研究を行なった。

局所因子の研究. まず局所体上の簡約群の既約表現の局所因子について研究した。局所因子とは局所 L -因子, 局所 ϵ -因子, 局所 γ -因子の3つを指し, 前者の2つは (大域的な) 保型表現の L -関数と ϵ -因子の Euler 積に現れる。また, γ -因子は L -因子と ϵ -因子の積および商を用いて定義されるが, 表現の誘導について良い性質を持つと考えられている。これらは局所 Langlands 対応を用いて定義するのが一般的である。 F を局所体とし, G を F 上の簡約群とする。当研究の目的は, $G(F)$ の**既約表現の局所因子を解析的に (つまり, L -パラメータを経由せずに) 定義すること**である。解析的な定義を与える事で, 表現論的な性質と局所因子やその特殊値を結びつける応用ができる。 (§1.2 の内容はその一例である。) F の標数が0の時, Piatetski-Shapiro, Rallis の Doubling 法を用いると (四元数的でない) 古典群の既約表現に対して局所因子を解析的に定義できる事が示されている ([LR05])。私は [LR05] の結果を

- (1) F が標数0で G が四元数ユニタリ群の場合 ([Kak20b]), および
- (2) F の標数が奇素数で G が古典群の場合 ([Kak21])

に拡張した。より正確には, $G(F)$ の既約表現 π と $F^\times$ の指標 χ , F の非自明加法指標 ψ に対して γ 因子の解析的な定義の候補 $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ を Doubling 法を用いて構成し, さらに γ 因子が満たすと期待されている10個の性質を選定し, $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ がその10個の性質を満たす唯一の関数である事を証明した。他の局所因子は γ -因子から逆に定義することが可能である。

局所テータ対応と形式次数の研究. 次に, $G(F)$ の既約二乗可積分表現から得られる**形式次数**という不変量の**局所テータ対応**という操作での振る舞いを研究した [Kak20a]。形式次数は Langlands パラメータを用いた明示公式 (**形式次数予想** [HII08]) が予想されており, 局所テータ対応も Langlands パラメータと相性が良い。局所テータ対応の Langlands パラメータによる記述は四元数的でないペアに対しては既に確立されており (**Prasad 予想**), 四元数的なペアに対しては現在私が研究しているテーマである。当研究で得られた公式は (Langlands 予想を含め) 未証明の事実を仮定せずに成立するが, 上記2つの予想と整合的であると確認できた。

研究は次の方針で行なった。まず (G, H) を四元数的な簡約相対ペアとし, “ほとんどランクが等しい” という条件を仮定する。この時局所テータ対応

$$\theta_\psi(\cdot, H): \text{Irr}(G(F)) \rightarrow \text{Irr}(H(F)) \cup \{0\}$$

が定義できる。 $\pi \in \text{Irr}(G(F))$ を二乗可積分で $\sigma = \theta_\psi(\pi, H)$ が0でないようなものとする。この時 σ も二乗可積分であり, 形式次数 $\deg \sigma$ が定義出来る。次に定数 $\alpha(G, H)$ を

$$\frac{\deg \pi}{\deg \sigma} = \alpha(G, H) \cdot c_\pi(-1) \cdot \gamma(0, \sigma \times \chi_G, \psi)$$

で定める。ここで χ_G は G から定まる $F^\times$ の指標である。この時 Gan-Ichino [GI14] による Rallis 内積公式の局所類似の考察より, $\alpha(G, H)$ が π に依らずに定まり, 局所 Siegel-Weil 公式に現れる定数 $\beta(G, H)$ を用いて記述出来る事がわかる。さらに研究の結果, 局所 zeta 値と絡作用素の特殊値を結びつける積分公式 ([Kak20a, Lemma 7.8]) を発見し, 十分な (G, H) に対して $\beta(G, H)$ を局所 zeta 値に帰着して計算する事に成功した。以上より形式次数の局所テータ対応での振る舞いが記述できた。

REFERENCES

- [GI14] Gan, W.T., Ichino, A.: Formal degrees and local theta correspondence. *Invent. Math.*, 195(3):509-672, 2014.
 [HII08] Hiraga, K., Ichino, A., Ikeda, T.: Formal degrees and adjoint γ -factors. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(1):283-304, 2008.
 [Kak20a] Kakuham, H.: Formal degrees and local theta correspondence: quaternionic cases. *preprint.*, arXiv:2012.04219, 2020.
 [Kak20b] Kakuham, H.: On the local factors of irreducible representations of quaternionic unitary groups. *Manuscripta Math.*, 163(1-2):57-86, 2020.
 [Kak21] Kakuham, H.: On the local doubling γ -factor for classical groups over function fields. *J. Number Theory*, 2021.
 [LR05] Lapid, E.-M., Rallis, S.: On the local factors of representations of classical groups. In *Automorphic representations, L-functions and applications: progress and prospects*, volume 11 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, 309-359. de Gruyter, Berlin, 2005.