今後の研究計画

G_2-dDT 接続を用いた G_2 多様体(更にはより広いクラスの 7 次元多様体）の不変量の構成を目指したい。つまり、概正則曲線 (ASD 接続) を「数える」Gromov-Witten 不変量（Donaldson 不変量）の類似を目指す。実際、類似の calibrated 部分多様体、または $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-instanton を用いた不変量の構成は、$G_2, \mathrm{Spin}(7)$ 幾何の中心的な問題として位置づけられている。私は、G_2-dDT 接続の場合はより深い結果が得られるのではと予想している。その理由は以下である。

(i)（より正確には）G_2-dDT 接続は「グラフ的」な calibrated 部分多様体に対応しており、特異集合の扱いが容易と思われるため。(ii)[論文 15, 19] から、calibrated 部分多様体や G_2-instanton の場合より G_2-dDT 接続のモジュライ空間は性質が良さそうなため。(iii) 類似の dHYM 接続の場合にはかなり研究が進んでおり、calibrated 部分多様体より深い結果も出ているため。

不変量の構成には、モジュライ空間をコンパクト化し、その性質を深く調べる必要がある。そのために、まず以下の**極小接続に対するコンパクト性定理**の証明に取り組む。

今までの研究から、基本的な概念や idea は部分多様体側から、技術的はことは接続（ゲージ理論）側からとると、上手くいきやすい。そこで、部分多様体側からミラー「体積」V をとり、それに対するコンパクト性定理を接続（ゲージ理論）側の手法を用いて示したい。

（ここで、V の臨界点のことを**極小接続**とよぶ。**コンパクト性定理**とは、V が一様有界な極小接続の列が与えられたとき、部分列をとれば「曲率が集中する箇所」S を除いて収束し、そこでは「バブル」が生じるというような主張をいう。（これは、一般のリーマン多様体に対して考えられ、G_2 構造等は必要ない。）この問題は現在、$G_2, \mathrm{Spin}(7)$-instanton に詳しい Daniel Fadel, Gonçalo Oliveira 氏と共に考えている。）

(高次元) ゲージ理論では、Uhlenbeck, Price, 中島, Tian らが Yang-Mills 接続のコンパクト性定理を与え、ASD, HYM, $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-instanton （これらは Yang-Mills 接続の特別なクラス）のときに、「曲率が集中する箇所」S の構造を詳しく調べ、calibrated 幾何と関連づけた。[論文 19] より、G_2-dDT 接続は V を最小するので、特に極小接続になる。（つまり、上述のゲージ理論と類似の状況にある。）更に最近、極小性の条件が Yang-Mills 接続に類似した式で与えられることを示した。これにより、Yang-Mills 接続の場合と類似の議論ができる可能性が高いと期待される。

しかし、いくつか難点がある。この証明には、V の「エネルギー密度」（積分因子）v が **Bochner 型不等式**を満たす（v がある発散形楕円型方程式の劣解になる）ことを示す必要がある。v は Yang-Mills 汎関数のエネルギー密度よりかなり複雑な形をしており、そのぶん処理が難しい。一方で、最近 Weitzenböck 公式の類似を示し、最高次の微分は上手く扱えることがわかった。低次の微分の項が煩雑であるが、もういくらかの技術的工夫で上手く評価できると見込んでいる。

もう 1 つの問題は、V は（ある意味で）拡大縮小変換で不変でないという点である。この性質は、S を調べるのに重要な性質である。しかし V は、拡大縮小変換な汎関数の和と「同値」という事実がある。その各項に対してゲージ理論の手法の類似を考え、そこから得られる結果を組み合わせることで、この問題を解決できると考えている。

そしてその後、Bochner 型不等式を用いて ϵ 正則性などの鍵となる主張の証明を試みる。（これらを仮定すると、S の Hausdorff 次元は 3 以下となることが既にわかっている。つまり、次元の観点からは Tian らの結果の類似が期待される。）