

これまでの研究成果のまとめ

(I) calibrated 部分多様体の具体的研究

具体例は特異点の局所モデルを与え、特異点解消等に非常に重要である。しかし構成には非線形偏微分方程式を解く必要があり、これは一般に難しい。[論文 1] では、 \mathbb{C}^n 上の Joyce の運動量写像の手法を応用し、ある一般のトーリック多様体内に特殊ラグランジュ部分多様体の例を構成した。[論文 2, 9, 17] では Lie 群の対称性を用いて、ある G_2 多様体の等質な calibrated 部分多様体を分類し、多くの余等質性 1 の例を構成した。特に錐特異点 (錐 (cone) の形をした特異点)を持つ例、その特異点解消の例を構成した。

また錐特異点の解析のために [論文 4, 6, 16, 7] では、等質な Cayley 錐多様体の無限小 (1 次) 変形、2 次変形を表現論を用いて調べ、モジュライの局所的構造を解明した。

(I') affine Legendre (aLeg) 部分多様体の導入

[論文 5] では、Legendre 部分多様体の概念の拡張である aLeg 部分多様体を定義した。それに対する新しい汎関数 ϕ -volume を定義し、ある条件下で ϕ -volume に関して極小な aLeg 部分多様体の安定性を示した。また aLeg 部分多様体全体のなす無限次元空間上の接続を定義して測地線を定め、ある条件下で ϕ -volume は測地的凸になることを示した。

(II) $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体の位相とモジュライ空間の研究

[論文 8, 10, 18] では H. V. Lê 氏、L. Schwachhöfer 氏と共同で Frölicher-Nijenhuis bracket という代数的構造を用いて $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体を調べた。[論文 12] では上の 2 氏および D. Fiorenza 氏とともに、これらをより発展・一般化した。一般的な次数付き微分環の考察から、リッチ曲率が非負の計量が入るための新しい位相的障害を発見した。(特に $G_2, \text{Spin}(7)$ 構造が入るための新しい障害になる。) [論文 11] では様々な幾何構造のモジュライ空間の共通の性質を見出し、その応用として、 G_2 構造の空間上の自然な計量、リーマン計量の空間上の Ebin 計量を共形変換した時の完備化の構造の違いを調べた。

(III) dHYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続のモジュライ理論

dHYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続は、calibrated 部分多様体や HYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -instanton の類似と考えられるが、類似性が厳密に成り立つかは確認の必要がある。[論文 13-15, 19] では、筑波大学の山本光氏と共同で、実際モジュライ空間に多くの類似点を発見した。

まず新しい幾何構造を導入し、dHYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続の変形がある楕円型複体の部分複体で記述できることを示した。より強く、変形の障害がなければ、モジュライ空間 \mathcal{M} の連結成分はトーラスになることを示した。更に、構造の摂動で \mathcal{M} が滑らかになること、 \mathcal{M} が自然な向き (大域的な性質) を持つことも示した。

上述の「ミラー」は、トーラス束に対する「実フーリエ向井変換」により得られる。これにより Lee-Leung は $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続を定義したが、他の幾何と両立しない等の問題があった。再度この手法を正確に行い、[論文 14] では $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続のより適切な定義を提案した。また $G_2, \text{Spin}(7)$ 幾何の基本的だが重要な等式である Cayley, associator equality のミラー版を予想した。[論文 19] ではそれが実際に成立することを示し、これを用いて

- (1) $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続が「体積」 V の最小を与え、その値が位相的に書けること、
(これは calibrated 部分多様体がホモロジー類の中で体積最小であることに対応する。)
- (2) 平坦束の $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続は平坦接続しかないこと、
- (3) $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体のホロノミー群が還元する場合に、モジュライ空間の構造を決定した。

ここで「体積」 V とは、部分多様体の通常の体積のミラーである。(物理では Dirac-Born-Infeld (DBI) action と呼ばれる。) この勾配流 (ミラー平均曲率流) は部分多様体の場合同様放物型ではない。[論文 19] では「ミラー平均曲率」の上手い表示を与えることで Deturck's trick が使えることを見出し、短時間存在と一意性を示した。