研究計画

Morse 関数とその高次元版といえる良い可微分写像について、写像や定義域多様体の幾何的な性質をみるということに取り組んできた。写像や多様体の構成という簡単そうで難しい問題を柱に、写像の特異点理論や微分トポロジーの手法を駆使して研究してきたのが自身の研究のポイントである。"研究成果"の (1) の問題について以下新たな風も吹かせながら継続していく。

- 同心円形折り目写像に関する新たな考察。
- 新たな折り目写像やより一般の可微分写像の良いクラスの検討と調査。

自身の研究の特徴の一つとして、幾何学を中心に数学の様々な分野と接点があるというものがある。写像の特異点理論、古典的な微分トポロジー、3–4 次元多様体の幾何学、グラフや多面体等組み合わせ的対象等に関連した成果を挙げてきた。さらに深め、新たな領域にも挑戦したい。例えば以下に取り組む。

- **対称空間と Morse 関数、折り目写像やより一般の良い可微分写像。**
  対称空間は、高い対称性を有する空間であり、微分幾何的に扱いやすく多くの関連研究がある。微分トポロジー的には、対称空間の特徴を捉える離散集合、対蹠集合は、多様体のホモロジーに関する情報を多く握っており、また Morse 関数の特異点全体の集合として実現されることも多いことがよく知られる。一方、微分トポロジー的見地からの研究は未開拓の部分が多い。現在、対称空間の情報を捉えるのに、Morse 関数の高次元版が重要な役割を担うと考える。田丸博士氏が定義に至った多くを捉えると期待される離散集合「s可換集合」は基本的な写像の例を考察した感覚同心円形折り目写像と相性が良いと考える。得てきた同心円形折り目写像等のいくつかは古典的なリー群や対称空間のものであり、空間の大まかな形を上手く捉えたものであると期待する。以下に取り組む。
  - 対称空間上の折り目写像や良い可微分写像の構成と新たな一般論。
  - 意味のある点集合の写像の特異点論を活用した定義。
- 3 **次元閉多様体上の折り目写像に関する結果とその 3、4、高次元における新展開。** 佐伯氏は、グラフ多様体という 3 次元向き付け可能閉多様体の良いクラスが、平面への単純な折り目写像を有するという結果を得ていた。佐伯氏との共同研究("Paper" の 3-4)で、この写像のクラスを同心円形折り目写像とできることが分かった。続いて 3-5 で、Reeb 空間のトポロジーに着目して意味のある整数値不変量を得た。今後対象を 3 次元多様体の中で広げ、 4 次元や高次元の中での意義も明らかにするという、高次元多様体の世界の幾何的構成的理解に関わる挑戦的問題にも挑む: 既に"研究成果"の高次元の結果と比べる等意味を考察している。
- **Reeb グラフや Reeb 空間に関する問題と微分幾何学で重要な可微分関数の理論等への応用。** 与えられたグラフと逆像の情報に対し、Reeb グラフがそれと同型で逆像も指定したものになるような可微分関数を構成する問題で、多く Morse-Bott 関数やその自然な一般化といえる関数を構成してきている。この経験が、微分幾何学で活躍する「等径関数」や「等径部分多様体」に関する研究に、微分トポロジーの風を吹き込めると期待する。関連した問題の、微分トポロジー的な部分の抽出、検討から始める。