研究成果

Morse 関数は、可微分多様体上に必ずしかも豊富にあり、孤立して現れる特異点から多様体のホモロジー群やより深く一部のホモトピーに関する情報がわかる。20 世紀前半には確立された理論である。1950-70 年頃の、主に自由度の高さゆえに扱いやすい、次元 5 以上の高次元の多様体の代数的位相幾何学、微分位相幾何学的な理論の発展に貢献した。例えば、Milnor の 7 次元の標準的なものとは異なる可微分多様体としての球面の発見で、多様体が位相的に球面であることを示す部分で使われた。そして、高次元化として、折り目写像や一般の写像の特異点論的、幾何学的研究、例えば存在するか否か、定義域多様体の幾何学的情報に関する研究が、1950 年代の Thom や Whitney の研究に始まり今に至るまで発展している。以下これまでの研究の一部を紹介する。

(1) **折り目写像の適当なクラスと定義域多様体。** Special generic 写像という折り目写像のクラスがある。これは、球面を難解な 4 次元の場合を除いて位相的に特徴づける、特異点を丁度 2 個有する Morse 関数の高次元版というべきクラスである。標準(単位)球面の自然な射影が special generic 写像の最も簡単な例だが、標準でない球面はある程度高い次元の空間へのこのクラスの写像を有さない。球面の直積の連結和として表される多様体やそれに近い多様体等について、位相や可微分構造等の細かい情報に頻繁に影響を与えるクラスであることが、1990 年代頃に「佐伯 修　氏(九州大学)」や「佐久間 一浩　氏(近畿大学)」により明らかにされた。Special generic 写像でみられる一連の興味深い現象を踏まえ、これまで具体的で扱いやすい折り目写像のクラスを導入し系統的に調べてきた。例えば、基本的であると同時に系統的に調べるべきクラスと考え、同心円形折り目写像というクラスを導入した。先程の球面上の Morse 関数を含め境界のある多様体上の同一の Morse 関数を境界で貼り合わせて自然にできる関数、特異点の集合の像が埋め込まれた同心円であるような折り目写像からなるクラスとして定義した。標準球面の自然な射影等を最も簡単な例として含む自然なクラスである。写像や多様体の幾何的な性質を系統的に調べた。折り目写像の特異点全体の集合は定義域多様体の値域の次元より 1 次元低い部分多様体で、そこに制限するとはめ込みである。このことからしても自然なクラスといえる。Special generic 写像でみられる前述の現象も、7 次元球面上の写像の具体的構成等通じ、新たに捉える等した。また佐伯氏との共同研究で、値域の方が 1 次元低いような同心円形折り目写像の分類に関する結果を得た。一連の成果は、「研究業績リスト」の最初の 3 件の「査読有論文」、「博士論文」、3-7、 3-8 等で発表している。

(2) **(1) の応用やそのほかの研究。** 高次元の代数的抽象的な分類ができている多様体のクラスに対し、具体的に折り目写像、値域の方が次元の低いような良い可微分写像を介し幾何的構成的に理解していくという自然だが高次元故難しい挑戦を考え、既に "Papers" の 3-1、3-2、3-3 等の結果を得た。可微分関数の逆像の連結成分からなる空間は、Morse-Bott 関数等の良い関数では自然にグラフとなり、多様体の骨組みを捉える。Sharko より創始された自然な問題「与えられたグラフを Reeb グラフとする(良い性質の)可微分関数を構成できるか。」に逆像に対する制約を課して挑み 1-4、 3-6 等の結果を得た。