これまでの研究成果のまとめ

劉　暁静

博士後期課程でラプラシアンに対する Kato の不等式を Radon 測度値 p-ラプラシアン（$1<p<\infty$）を含む場合に本質的に拡張し、その直接的な応用として非線形楕円型作用素に対する「強最大値原理」の研究を行いました。この研究は、粗くいえば、適切な許容空間(Admissible Class)を設定し、その中で $u\geqq 0$, $-\Delta_p u + a(x)u^{p-1} \geqq 0$ が測度的な意味で成立し、u がある程度の大きさの零点集合を持てば $u=0$ が殆ど至る所成立する。」となります。ここで導入された適切な許容空間の概念は $p=2$ の場合には自動的に満足されるため不必要となりますが、一般の場合にも通常のソボレフ空間 $W^{1,p}$ を含むような一般性のある集合であります。また集合の大きさを適切に測るため、通常の p-キャパシティに加え、それと同等な p-ラプラシアンを用いたキャパシティを導入し活用しました。この最大値原理の結果は、一般には一意性のない非線形退化楕円型方程式の解全体に対して、許容空間を適切に設定すれば解の一意性が成立するという主張であり、非常に独創的で良い結果であると考えています。線形($p=2$)の場合には、この主張は弱一意接続定理ともいわれ、既に Ancona(1979)等によりポテンシャル論を用いて研究され、その後 Benilan-Brezis-Ponce(2004)等により偏微分方程式論の手法で別証明も与えられています。しかし、非線形の場合には部分的な結果が知られているのみであり、本研究はこれらの先行研究の直接の延長線上にあるといえます。そして、p-ラプラシアンに対する Kato の不等式の更なる精密化と Radon 測度値の準線形楕円型方程式の可解性の研究に着手しました。現在までにラドン測度が p-キャパシティを法として 「測度的拡散部分」と「測度的集中部分」に一意分解されることを用いて、Kato の不等式の更なる精密化に成功しました。その結果を基礎として、線形の場合において Brezis-Ponce により証明された「測度的集中部分」に対する「逆最大値原理」を非線形の場合に拡張しました。

その後、p-ラプラシアンを含むような一般な準線形楕円型作用素（以下では A と記す）に対して、先行研究の p-ラプラシアンに関する Admissibility の概念を作用素 A に対する Admissible Class の概念に拡張し、作用素 A に対して強最大値原理、逆最大値原理と Kato の不等式を拡張することに成功しました。さらに、A に対する境界問題に対して Admissible 解の存在と一意性について研究しています。現在まで存在性の証明と部分的な一意性の証明ができました。これらの研究の最も独創的な点は、A- Admissible Class を導入し，組織的に理論を展開する点であります。また本研究は $p=2$ の場合にはポテンシャル論とも関係（Non-admissible な解が pathological な解に対応）が深く非常に興味深いと考えています。

昨年から、１９２０年代に G. Hardy 氏により導入された積分型不等式の拡張を着手しました。その不等式に関する豊富な先行結果を出発点に、一次元重み付きの場合に拡張された。その結果は意外にも重みの冪のパラメーターの範囲より臨界の場合と非臨界の場合があります。そのため、不等式の最良定数はパラメータの範囲より場合分けをして定義しました。