真鍋 征秀 **(Masahide Manabe)**

今後の研究計画

3 次元超対称ゲージ理論と結び目不変量. 最近，我々は List of Publications の [20]:

- M. Manabe, S. Terashima and Y. Terashima, “The colored Jones polynomials as vortex partition functions,” JHEP **12**, 197 (2021) [arXiv:2110.05662 [hep-th]]

で 3 次元球面 S^3 内の任意の結び目の colored Jones 多項式を 3 次元超対称ゲージ理論における K 理論的 vortex 分配関数として与えるようなアーベル型ゲージ理論 “knot-gauge theory” を構成，提案した．これにより我々は “colored Jones 多項式 =K 理論的 vortex 分配関数” という関係を構成的に与えた．この研究では，その構成と具体的な計算の為に，2015 年に Benini-Zaffaroni により超対称局所化の方法で得られた $S^2 \times S^1$ 上の超対称ゲージ理論の A-twisted 分配関数 (twisted index) とその K 理論的 vortex 分配関数への “因子化” を用いた．Witten により，colored Jones 多項式は (S^3 上の) 3 次元 $SU(2)$ Chern-Simons ゲージ理論の Wilson loop 期待値として得られるので，我々の提案はある種の 3 次元-3 次元対応だと考えられる．ただし，現状では，我々が構成した knot-gauge theory の 6 次元的な起源は不明であり，2011 年に Terashima-Yamazaki や Dimofte-Gaiotto-Gukov により提案された 3 次元-3 次元対応との関係もよく分かっていない．このような先行研究との関連は一つの興味深い問題である．また，今後の研究としては例えば以下のようなものにも興味がある．まず我々の knot-gauge theory は結び目に対するタングル図によりラベルされ，Reidemeister move により非自明な変換を受けるが，現在，その変換前後のゲージ理論的な関係はよく分かっておらず，今後の研究で明らかにしたい問題である．別の問題として，我々は “colored Jones 多項式 =K 理論的 vortex 分配関数” という関係を与えたが，数学的にはこの右辺はある vortex モジュライ空間に対するオイラー標数として得られることが期待できる．vortex モジュライ空間を具体的に構成して，このことを実際に示すことは，Jones 多項式に新しい幾何学的解釈を与えるので興味深い問題である．また別の興味深い問題として，Jones 多項式の categorification (Khovanov) を与える Dunfield-Gukov-Rasmussen による refinement のパラメータ t (homological grading) の R 行列への導入が考えられる．現在まで任意の結び目に対して，このような refinement を与える結び目不変量の系統的な計算方法は知られておらず，knot-gauge theory における，このパラメータ t の導入は数学的にも興味深い問題である．

非摂動的位相的弦理論と refined 位相的弦理論. 場の量子論や弦理論と同様に位相的弦理論でも非摂動効果の取り入れはしばしば重要になる．CEO 位相的漸化式は，実際には，局所 CY3 上の位相的弦理論の摂動的自由エネルギーを与えるが，そこに非摂動的補正を加える方法が Eynard-Marino (2008) により提案されている．(その応用として例えば,「これまでの研究成果のまとめ」で述べた結び目の colored Jones 多項式の位相的漸化式による構成 [3] の為に，我々はある “補正因子” を *ad hoc* に導入する必要があったが，Borot-Eynard (2012) は，その “補正因子” が非摂動補正により説明できることを示した．)

一方で，局所 toric CY3 上の refined 位相的弦理論の Nekrasov-Shatashvili 極限は位相的弦理論の非摂動補正を与えるという提案も知られている．(ここで refined 位相的弦理論は 2 つのパラメータ ϵ_1 と ϵ_2 を持つが，(通常の) 位相的弦理論は $\epsilon_1 = -\epsilon_2 =$ string coupling constant の極限で得られる一方，Nekrasov-Shatashvili 極限は $\epsilon_1 = 0$ として与えられる．また，この refinement は上の homological grading のパラメータ t の導入と本質的に同じものである．) そこで，Nekrasov-Shatashvili 極限による位相的弦理論の非摂動補正と Eynard-Marino による非摂動補正との関係を明らかにすることは重要な問題だと考える．また，位相的弦理論はブレイン分配関数を通してスペクトル曲線の量子化を与えることが知られているが，refined 位相的弦理論のブレイン分配関数はスペクトル曲線の “2 重量子化” を与えると考えられる．この 2 重量子化と位相的弦理論の非摂動補正との関係も興味深い問題である．さらに，位相的漸化式の “refined 版” は β 変形行列模型のループ方程式の範疇でしか定式化されていないが，一般的な refined 位相的漸化式を定式化して，さらに非摂動補正との関係を明らかにすることも興味深い問題だと考える．