真鍋 征秀 (Masahide Manabe)

これまでの研究成果のまとめ

私は数理物理学，特に，位相的弦理論，行列模型，超対称ゲージ理論に関連するテーマに興味を持って研究を行っている．以下，これまでの研究成果の概要をいくつか述べる．文献の番号は別紙の List of Publications の通し番号である．

CEO 位相的漸化式． Chekhov-Eynard-Orantin の CEO 位相的漸化式は，一般にスペクトル曲線 $\Sigma = \{\,(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, A(x,y)=0\,\}$ に対する Liouville one-form $\omega_1^{(0)}(z) = ydx$ と Bergman 核 $\omega_2^{(0)}(z_1,z_2)$ から逐次的に種数 g の多重線形有理型微分 $\omega_h^{(g)}(z_1,\ldots,z_h)$, $h \geq 1$, $g \geq 0$ を定義する．ここで，z は $A(x,y)=0$ を与える適当な局所座標 $x=x(z), y=y(z)$ である．CEO 位相的漸化式は，行列模型のループ方程式にその起源に持ち，位相的弦理論や 2 次元重力が関係する理論に対して興味深い応用ができる場合がある．以下は関連する研究成果の概要である．

- あるクラスの局所 toric Calabi-Yau 3-fold (CY3) に対して，$\omega_h^{(g)}(z_1,\ldots,z_h)$ は，ある Lagrangian に対する開 Gromov-Witten 不変量を与え，さらに 2010 年頃，これは geometric engineering により，4 次元 $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ 超対称ゲージ理論のある型の表面演算子の相関関数を与えると予想された．我々は具体的な計算により $SU(2)$ の場合にそれを検証した [2,4].
- 2009 年頃に Dijkgraaf-Fuji により 3 次元 $SL(2,\mathbb{C})$ Chern-Simons ゲージ理論における体積予想の位相的弦理論への埋め込みが議論された．ここで，Chern-Simons ゲージ理論において平坦接続のモジュライ空間 (古典解の空間) は $SL(2,\mathbb{C})$-character variety と呼ばれる代数多様体で記述されるが，これが 1 次元の場合，それをスペクトル曲線と考えて CEO 位相的漸化式を適用することで Chern-Simons ゲージ理論の不変量が得られるのかは興味深い問題となった．我々は CEO 位相的漸化式を使えば，結び目に対しては colored Jones 多項式の (large color の) 漸近展開が得られること等を予想して具体例でそれを検証した [3].
- あるクラスの行列模型は 2 次元の自由場表示を持ち，2 次元共形場理論 (CFT) と密接に関係する．例えば，そのような行列模型の範疇では，CEO 位相的漸化式は行列模型のループ方程式から導出され，ループ方程式は Virasoro 束縛条件と呼ばれる (2 次元 CFT の Virasoro 代数の生成子による) 条件と等価であることが示される．我々は，エルミート行列模型で与えられたスペクトル曲線に対して，2 次元 CFT における Virasoro 特異ベクトル (無限族) に対する Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 微分方程式と対応する “量子 (スペクトル) 曲線” の無限族が，CEO 位相的漸化式を用いることにより具体的に構成できることを示した [8]．また，その拡張として，量子曲線の “超対称化類似” も議論した [9,13].

厳密分配関数を使った研究． 2007 年頃の Pestun による超対称局所化を用いた S^4 上の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の分配関数や相関関数の厳密計算を契機にして，今日まで様々な次元や背景時空における超対称ゲージ理論の分配関数や相関関数の厳密結果が得られている．以下はそれらを応用した研究成果の概要である．

- 位相的弦理論は 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ non-linear sigma model (NLSM) の topological twist により定義されるが，NLSM は 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ gauged linear sigma model (GLSM) の IR 固定点で実現されるので，GLSM は NLSM の “UV completion” として直接的に位相的弦理論と関係する．2012 年に Jockers-Kumar-Lapan-Morrison-Romo は，超対称局所化で得られた 2 次元球面 S^2 上の GLSM の分配関数の厳密な結果を用いて，GLSM が CY 多様体を記述する場合には，分配関数が CY 多様体の量子 Kähler モジュライ空間上の Kähler ポテンシャルを与えると予想し，CY 多様体の種数 0 Gromov-Witten 不変量の新しい計算方法を提案した．我々は，これを CY4 に適用して，CY4 の量子 Kähler モジュライ空間上の Kähler ポテンシャルの厳密公式を予想した [5].
- また，類似の方法で得られた S^2 上の A-twisted GLSM の分配関数の厳密な結果を用いて，以下のような研究成果も得た：– 局所 toric CY 上の B 模型 Yukawa 結合の計算 (non-compact 性による twisted mass の系統的な導入方法の提案)[15]，–（複素）Grassmannian の中の determinantal CY 多様体に対する Givental I 関数の計算 [16]，– $\mathfrak{su}(N)$ XXX (XXZ) スピン鎖の off-shell ベーテ波動関数の codimension-2 orbifold defect としての構成 ($\mathfrak{su}(2)$ の場合の先行研究の一般化)[17].