(2) これまでの研究成果のまとめ 真瀬 真樹子

$K3$ **曲面上の点付き曲線の Weierstrass 半群について** (米田二良氏との共同研究)

本研究では次の問題を考察した:

問題: 半群 H, つまり, 群 $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cap \mathbb{N}$ の部分集合であり補集合 $\mathbb{N}_0 \backslash H$ が有限集合である群 H が与えられたとき, $K3$ 曲面上の点付き曲線 (C, P) であり, その Weierstrass 半群 $H(P)$ が H に一致するものを構成することができるか？

ここで曲線 C 上の点 P における Weierstrass 半群 $H(P)$ とは次で定義される:

$$H(P) := \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, \exists f \in \mathbb{C}(C) \quad s.t. \quad (f)_\infty = nP\},$$

ここで $\mathbb{C}(C)$ は C 上の有理関数体であり, $(f)_\infty$ は関数 f の極因子である.

出版された論文 [KM19][*1] では, $n \geq 3$ としたとき半群

$$H = \langle 2n,\, 8n-2,\, 12n-1 \rangle, \quad \text{及び} \quad H = \left\langle \begin{array}{l} 8n-8,\, 8n-6,\, 8n-4,\, 8n-2, \\ 8n,\, 16n-5,\, 16n-3,\, 16n-1 \end{array} \right\rangle$$

を Weierstrass 半群として持つ $K3$ 曲面上の点付き曲線をそれぞれ構成した.

まず, $K3$ 曲面としては, 重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ の, 因子 $B \cup \{(0:0:1)\}$ で分岐する 2 重被覆の極小モデル S をとる. ただし曲線 B は次の方程式で定まる 12 次曲線である:

$$B : X_2(X_2 - 2X_0^4 - X_1^4)(X_2 - X_0^4 - 2X_1^4) = 0.$$

そして, 重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ は変数 x, y, z にそれぞれ重みが $\mathrm{wt}\, x = \mathrm{wt}\, y = 1$, $\mathrm{wt}\, z = 4$ と付加された次数付けを持つ射影平面

$$\mathbb{P}(1,1,4) := \mathrm{Proj}\, \mathbb{C}[x, y, z]$$

である. 曲線 $F \subset \mathbb{P}(1,1,4)$ (resp. 点 $P \in F$) に対して, 2 重被覆に関する前像を $\widetilde{F}$ (resp. $\widetilde{P}$) と記す.

(1) 次数 $4n$ の Fermat 型曲線 F_n を重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ 上に取る: $F_n : x^{4n} + y^{4n} + z^n = 0$. また, F_n 上の点を $P_n = (1 : \zeta : 0)$ とする. ただし, $\zeta^{4n} = -1$ である. 分岐因子と曲線 F_n との交わりの様子を調べることにより, 前像 $\widetilde{F_n}$ が $K3$ 曲面 S 上にあることが証明できる. 更に, 点 $\widetilde{P_n}$ の Weierstrass 半群が与えられた半群

$$H(\widetilde{P_n}) = \langle 2n,\, 8n-2,\, 12n-1 \rangle$$

に一致することが計算により確かめられる.

(2) 次数 $4n$ の次で定まる曲線 F_n を重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ 上に取る： $F_n : x^{4n-4}z + y^{4n} + z^n = 0$. また, F_n 上の点を $P = (1 : 0 : 0)$ とする. 分岐因子と曲線 F_n との交わりの様子を調べることにより, 前像 $\widetilde{F_n}$ が $K3$ 曲面 S 上にあることが証明できる. 更に, 点 $\widetilde{P_n}$ の Weierstrass 半群が与えられた半群

$$H(\widetilde{P}) = \left\langle \begin{array}{l} 8n-8,\, 8n-6,\, 8n-4,\, 8n-2,\, 8n, \\ 16n-5,\, 16n-3,\, 16n-1 \end{array} \right\rangle.$$

に一致することが計算により確かめられる.

[*1] J.KOMEDA and M.MASE, Curves on weighted $K3$ surfaces of degree two with symmetric Weierstrass semigroups, Tsukuba J. Math. vol.43, No. 1, (2019), 55–70