

これまでの研究成果のまとめと今後の研究計画

大川 領

これまでの研究成果のまとめ

代数幾何学，とくに射影平面 P^2 上のベクトル束のモジュライを対象に研究した．このモジュライを，^{えびら} 籠の表現を用いて研究してきた．籠とは，有向グラフのことである．これまで，モジュライの双有理変換の記述や，モジュライ上の積分の計算，さらに上原北斗氏と共同でトーリック曲面の導来圏についても調べた．

特に，モジュライ上の積分はネクラソフ分配関数と呼ばれ，ヤング図形の数え上げ母関数になる．具体的には，箱の総数ごとにヤング図の組をすべて数え上げて構成される有理式を係数とする母関数になる．最近では，この分配関数と可積分系や表現論との関係に興味を持っている．また，少し異なる話題としては，原伸生氏と共同で正標数の体上の特異点についてある種の有限性を考察した．以下ではおおまかな研究経過を説明する．

超弦理論において導入された導来圏上の安定性条件という概念を用いて，射影平面 P^2 上の接続層から^{えびら} 籠表現への半安定モジュライの自然な同型を与えた．これにより複数のモジュライとその間の射が自然に得られる．この壁越えと呼ばれる現象を利用して，モジュライのフリップ構造を解析した．

その後さらにモジュライ上の積分計算に取り組むために， P^2 上の枠付きベクトル束のモジュライを調べた．ここで望月拓郎氏の開発した壁越え公式を適用し，ネクラソフ分配関数の函数等式を得た．また類似の函数等式である物理学者の伊藤-丸吉-奥田の予想に肯定的な解決を与えた．

より最近の研究では，吉田豊氏と共同で A_1 型の手鋸^{てのこ}籠多様体の計算に取り組んだ．とくに接束のオイラー類の積分について，これまでと異なる組み合わせ論的な記述を得た．これを端緒として，より基本的なグラスマン多様体や旗多様体に望月拓郎氏の壁越え公式を適用し， K 理論的な計算への理解を深めた．以下，主な論文について説明する．

R. Ohkawa and H. Uehara, *Frobenius morphisms and derived categories on two-dimensional toric stacks*, Adv. Math. 244 (2013), 241-267.

2次元トーリックスタックの導来圏に対して、生成元を具体的に構成した。自然数 m に対して、トーラスの元の m べきをとる写像は、Frobenius射と呼ばれるトーリックスタックの自己準同型を、自然に定める。このFrobenius射による構造層の押し出しが、2次元トーリックスタック上の接続層の導来圏を生成することを示した。

R. Ohkawa, *Flips of moduli of stable torsion free sheaves with $c_1 = 1$ on P^2* , Bull. Soc. Math. France, 142, no 3 (2014), 349-378.

モジュライの双有理変換の構造解析に取り組んだ。その際、籠表現のモジュライとして捉えることにより、安定性条件が1次元分の自由度を持つことに着目した。これにより、複数のモジュライとその間の射が自然に得られる。この壁越えと呼ばれる現象を利用することにより、モジュライのフリップ構造を解析した。

R. Ohkawa, *Wall-crossing between stable and co-stable ADHM data*, Lett. Math. Phys. 108(2018), 1485-1523.

P^2 上の枠付きベクトル束のモジュライを調べた。望月拓郎氏の開発した壁越え公式を適用することにより、ネクラソフ分配関数の函数等式を得た。この函数等式は、物理学者の伊藤-丸吉-奥田が予想した函数等式の類似である。同じ方法で、この予想が解けることをつぎの論文にまとめた。

R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*, Moscow Math. J. 20 (2020), no. 3, 531 - 573.

A_1 特異点により定まるネクラソフ分配関数のみならず函数等式を証明した。物理学者の伊藤-丸吉-奥田により予想されていたものであった。さらに最近では、同じ方法で(-2)爆発公式が示せることもわかった。これにより、バーシュタイン-シーチキンの示したパンルヴェ関数の等式について、別証明に取り組みたいと考えている。