これまでの研究成果

岡崎真也

3 次元球面 S^3 に埋め込まれた種数 2 のハンドル体を種数 2 のハンドル体結び目と呼び, H で表す．ふたつのハンドル体結び目が同値であるとは一方が他方に S^3 のアイソトピーでうつることをいう．H をメリディアンディスクで切りひらき S^3 内の結ばれた 2 つのソリッドトーラスを得たとする．それを絡み目とみなし, H の内在的絡み目 L という．内在的絡み目はメリディアンディスクの選び方に依存する．ハンドル体結び目のメリディアンディスクは無限に存在するので, ハンドル体結び目の内在的絡み目も無限に存在する．

ローラン多項式に対して次数は古典的な不変量として知られている．2 変数ローラン多項式 $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_1^{a_i} t_2^{b_i} \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ に対して次数の一般化として次の不変量を導入する．

$$d(f) := \max\left\{ \left| \det\left(\begin{bmatrix} a_i - a_j & a_i - a_k \\ b_i - b_j & b_i - b_k \end{bmatrix} \right) \right| \;\middle|\; 1 \leq i, j, k \leq n \right\}$$

アレクサンダー多項式 $\Delta_{(H,M)}(t_1, t_2)$ はハンドル体結び目 H とそのメリディアン系 M に対する不変量であり, メリディアン系の取り替えはアレクサンダー多項式に $GL(2, \mathbb{Z})$ として作用した．$d(\Delta_{(H,M)}(t_1, t_2))$ はこの作用への不変量となっており次が成り立つ．

定理 1 [O.]
$d(\Delta_{(H,M)}(t_1, t_2))$ は M に依らない H の不変量である．

Y. Diao により絡み目 L の交点数 $c(L)$ は L のアレクサンダー多項式の次数を用いて $\deg(\Delta_L(t)) \leq c(L) - b(L)$ と評価できることを示されている．ここで $b(L)$ は絡み目 L の組紐指数である．この結果の類推として以下の結果が得られた．

定理 2 [O.]
ハンドル体結び目 H の任意の内在的絡み目 L に対して

$$d(\Delta_{(H,M)}(t_1, t_2)) \leq c(L) - b(L)$$

この定理を用いて任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してすべての内在的絡み目の交点数が n 以上であるハンドル体結び目が存在することを示した．