

これまでの研究成果のまとめ

大田 武志

最近、超対称性ゲージ理論と対応する行列模型の性質を研究して、以下のような成果を得た。

1. q -AGT 予想に基づき、 $SU(2)$ ゲージ理論の 5 次元版 Nekrasov 分配関数の形から、 q -変形したコンフォーマルブロックを与える頂点演算子を決定した。その頂点演算子と遮蔽演算子を用いて、 q -変形されたブロックのクーロンガス表示を得た。すこし、頂点演算子の挿入位置をずらすことによって、この q -ブロックが Nekrasov 関数と一致することをインスタントン展開の低い次数において確認した (Publication List の [35])。
2. レベル 1 の楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が、2 次元場の理論と 5 次元超対称ゲージ理論の対応において、ダイナミカルな対称性として、重要な役割を果たすことを議論した。楕円版の Frenkel-Kac 構成で、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ 代数のレベル 1 の加群を構成することができる。変形パラメータ p のある 1 のベキ根極限において、パラフェルミオン系と自由ボソンが現れる。そして、2d/5d 対応は、パラ Virasoro 対称性をもつ 2 次元のコセット CFT と $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_r$ 空間上の 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ ゲージ理論の間の対応に帰着する ([37])。
3. Gross-Witten-Wadia 模型に対数ポテンシャルを加えて一般化したユニタリー行列模型が、 $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ 超対称ゲージ理論で物質場の数が 2 の場合と密接に関連することを議論した。行列模型のスペクトル曲線とゲージ理論の Seiberg-Witten 曲線が同型であることを示した。行列模型の分配関数が Painlevé III 方程式のタウ関数であることを直交多項式の方法を用いて示した。この模型の二重スケーリング極限が、ゲージ理論側では Argyres-Douglas 超共形固定点への極限に対応することを明らかにした ([38,39])。
4. 上記 3 のゲージ理論/行列模型対応をより一般の場合に拡張した ([41])。それは、多重臨界ユニタリー行列模型と、 $\hat{A}_{2k,2k}$ 理論とよばれる 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論との対応である。われわれは、 k 次多重臨界点でのユニタリー行列模型が、 $\hat{A}_{2k,2k}$ 理論の (A_1, A_{4k-1}) Argyres-Douglas 固定点と対応することを示した。
5. 上記 4 で取り扱った多重臨界ユニタリー行列模型を、行列のサイズ N が大きい極限で、鞍点法を用いて詳しく調べた。固有値密度関数は、単位円周上にどのようにユニタリー行列の固有値が分布するかを示す関数である。鞍点方程式を解いて、固有値密度関数を求めた。ポテンシャルの形と密度関数から、この模型は 3 つの相をもつことを示した。強結合相が 1 つと弱結合相が 2 つ、合わせて 3 つである。強結合相では、円周上に間隙がない形で固有値が分布する。2 つの弱結合相では、どちらの場合も、固有値が分布しない間隙が一つ円周上に現れる。固有値分布関数を用いて大きい N での自由エネルギーと Wilson ループの具体形を 3 つの相それぞれについて決定した。自由エネルギーを調べることで、強結合相と弱結合相の間の相転移は、3 次相転移であることを明らかにした。また、片方の相転移点は、多重臨界点で、もう一方の相転移点は、通常臨界点であることも示した。多重臨界ユニタリー模型の摂動とその二重スケーリング極限も調べた ([42])。