これまでの研究成果 (以下論文の文献番号は論文リストの番号と同一)

移流拡散方程式は物理学を始め、天文学、生物化学等、多岐の分野に現れる数理モデルの極限操作によって導出される。この方程式は拡散方程式に移流効果を与える非線形干渉項が作用したもので、そのポテンシャルは楕円型偏微分方程式で与えられる。そのため、二つの未知函数を含む非線形連立型偏微分方程式であり、大きく異なる物理スケールの元で観察される普遍的な数理構造を代表していると考えられる。移流拡散方程式は質量保存則とあるエントロピー汎函数の消散性を擁し、半線形である主要項が熱方程式の場合は、Boltzmann-Shannon エントロピーが対応する。移流拡散方程式の解の減衰や漸近挙動の研究において、対応するエントロピー汎函数に対する評価が有用である。これは、移流拡散方程式を含む拡散方程式がエントロピー汎函数の Wasserstein 距離に関する勾配流である事実に基づくものである。Wasserstein 距離とは確率測度に対して定まる距離の一つであり、多様体への応用から微分幾何学において幅広く研究されている。確率密度函数に対するエントロピー汎函数とモーメント、ポテンシャルの関係は函数不等式で記述される。北海道大学の久保英夫氏と東北大学の小川卓克氏との共著 [1] において、対数函数の重みを課した確率密度函数の Boltzmann-Shannon エントロピーに対する函数不等式の最良定数とそれを達成する函数を同定した。また、論文 [4] において、Boltzmann-Shannon エントロピーの 1 パラメータ拡張である Rényi エントロピーに対する函数不等式の最良定数とそれを達成する函数を同定した。これらの函数不等式の非線形偏微分方程式の応用の一つとして、小川卓克氏との共著 [3] において、準線形移流拡散方程式の初期値問題のある時間大域解に対する時間無限大における漸近挙動を示した。その証明の根幹となったのは、方程式に付随するエントロピー消散性であり、一般化エントロピー汎函数に対する対数型 Sobolev の不等式とモーメント不等式を組み合わせたエントロピー消散法により解の漸近挙動を得た。

移流拡散方程式の初期値問題を考えた際、適切な条件のもとで時空間変数に関するスケール不変性が従う。スケール不変性を擁する偏微分方程式の研究において指導原理となるのが Fujita-Kato の原理である。Fujita-Kato の原理は Fujita-Kato (1964) による非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題の適切性に関する結果に端を発し、方程式の持つスケール不変性に関連した函数空間において、その問題の適切性が期待されることを指す。非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題は非局所的な作用素を非線形項に持つが、空間遠方において減衰を課さない函数空間である一様局所 Lebesgue 空間において適切であることが知られている。一方で、移流拡散方程式の初期値問題は、非線形構造において熱核とポテンシャルの具体的な関係や平滑化効果の影響が得られないため、一様局所 Lebesgue 空間における適切性は未解決であった。論文 [2] において、一様局所 Lebesgue 空間上のポテンシャルに対する臨界型函数不等式を拡張することで、Fujita-Kato の原理による臨界空間における初期値問題の適切性を証明した。また、移流拡散方程式の初期値問題が一様局所 Lebesgue 空間において適切であるという結果から、小川卓克氏との共著 [5] において、生物化学における走化性粘菌のモデルである Keller-Segel 系の緩和時間パラメータの無限大極限を考察し、Keller-Segel 系の解が移流拡散方程式の解に一様局所 Lebesgue 空間上強収束することを示した。