

# 今後の研究計画

高橋 良輔

deformed Hermitian–Yang–Mills (dHYM) 方程式の解の存在問題は、supercritical phase の場合には一応の解決を見たが [1], 解が存在しない場合に何が起きているかを調べる研究はほとんど行われていない. また, 接続層のなす導来圏  $D^b\text{Coh}(X)$  に対する Bridgeland 安定性との関係を調べるためにも, 方程式を正則ベクトル束  $E \rightarrow X$  へと一般化し, その可解性を調べる必要があるだろう. 以上の考察のもとに, 私は次の 2 つの研究を行いたいと考えている.

## 研究 (A) Optimal subvariety の構成問題

Nakai–Moishezon 型判定法 [1] によれば, supercritical dHYM 方程式の可解性は, 任意の subvariety  $Y \subset X$  に対する正則交叉数の言葉により完全に記述できる. つまり, 解が存在しない状況では, 不安定化する subvariety が少なくとも 1 つは存在するわけだが, 「そのようなものの中で何らかの意味で optimal なものは存在するか?」という問題を考える. これは slope 安定でないベクトル束に対する Harder–Narasimhan filtration の類似物 (subvariety 版) と考えられる. 手がかりとしては, hypercritical dHYM 方程式の可解性を, Calabi–Yau 汎関数 (dHYM 方程式を臨界点として特徴付けるような汎関数) の coercivity によって特徴付けたという Chu–Lee による最近の結果がある. coercivity は Calabi–Yau 汎関数の境界付近における漸近挙動を定量的に見る不等式であるから, その無限遠における slope を最小化するという意味で, optimality を定式化できる. より具体的には, 与えられた subvariety  $Y \subset X$  に対して model curve ( $Y$  に沿って無限遠で特異性を生じるようなポテンシャルの空間上の ray) を考え, それに沿った Calabi–Yau 汎関数の slope の極限を代数幾何学の言葉で記述することを試みる. K-安定性の文脈では, 似たような手法として,  $Y \subset X$  に沿った deformation to the normal cone から構成されたテスト配位に対して, 非アルキメデスの汎関数を計算するというものが既にあるので, 参考にしたと考えている. また,  $X$  が複素 2 次元の場合には, 問題は通常の Nakai–Moishezon 判定法に帰着することができる. この場合, dHYM 方程式は reference 計量に対して 2 次依存になるので, より具体的に計算が可能であると考えられる.

## 研究 (B) 正則ベクトル束版の dHYM 方程式の解の存在問題

正則ベクトル束版の dHYM 方程式 (以下, 単に dHYM 方程式と記す) は Collins–Yau によって 2018 年に導入されたが, その性質については殆ど謎のままであった. 近年, Dervan–McCarthy–Sektan により, Hermitian–Einstein 方程式からの十分小さな変形として, dHYM 方程式の解が得られている. この研究に触発される形で, 私は正則ベクトル束版の  $J$ -方程式の概念を導入し, その基本的な性質と具体例を調べ, その十分小さな変形として, 大きな Lagrange 角を持つ dHYM 方程式の解が得られることを示した [15]. 一方で, Dervan–McCarthy–Sektan による例で得られるのは小さな Lagrange 角を持つものだけである. [15] で構成された具体例は技術的な問題により  $X$  が複素 2 次元, あるいは  $E$  の階数が 2 の場合に限定されている. その理由の 1 つは, 部分束に対する第 2 基本形式の高次の項が生じるからであり, この項を扱うための工夫が必要となる. 具体的には, 計量の空間上に測地線概念を導入し, 汎関数や第 2 基本形式がこれに沿ってどのように振る舞うのかを調べることである.  $J$ -方程式に対応する安定性を, 接続層や subvariety の言葉を用いて定式化することを試みる. ある種の漸近的な状況や vortex 束上の例に対しては [15] の中で既に結果を得ているので, これを参考にしたと考えている.