これまでの研究成果のまとめ

高橋 良輔

まずはじめに，私の専門は複素多様体上の幾何解析である．特に，与えられた（コ）ホモロジー類の中に標準的な幾何構造が存在するかという問題に興味があり，現在に至るまで研究を進めてきた．例えば，コンパクト Riemann 面上の定曲率計量がその典型例であり，曲率の符号に応じて曲面は分類される．このように，標準的な幾何構造の存在は，考えている多様体の分類やモジュライ問題とも密接な関係があり，そのような構造がより一般の高次元の多様体上で存在するかどうかが問題となる．

Yau–Tian–Donaldson 予想周辺の話題

Yau–Tian–Donaldson (YTD) 予想は，偏極多様体 (X, L) 上にスカラー曲率一定の Kähler 計量が存在するためには，それが K-安定（代数幾何学の概念）であることが必要十分であることを主張している．計量の存在を示すには力学系/幾何学的フローによるアプローチが有効であり，[2,8,10,14,16] では Kähler 計量の空間上の新しい力学系/幾何学的フローを導入し，何らかの安定性条件のもとでその収束を示した．一方，X は $L^{\otimes k}$ の大域的な正則切断を用いて，射影空間 $\mathbb{CP}^{N_k}$ $(N_k := H^0(X, L^{\otimes k}))$ に埋め込むことができる．この観点から，標準計量の存在問題を **balanced 埋め込み**と呼ばれる標準的な射影埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^{N_k}$ の，$k \to \infty$ としたときの漸近的な存在条件として捉えることが可能となる．[5,9,10,11,13] では，様々な標準計量/幾何学的フローに対して，解の存在条件と balanced 埋め込みの関係を Bergman 核の漸近展開を用いて調べた．さらに，Mumford による幾何学的不変式論（GIT）との関係を調べるという方向では，[12] において，標準計量やその量子化に対して GIT ウェイトを計算する手法を開発した．また，[2,6] では標準計量が存在しない場合に，幾何学的フローに沿って解が爆発する様子を解析した．結果として，特異点が代数的に形成され，対応するテスト配位がある非アルキメデス的なエネルギー半関数を最小化することを示した．

Thomas–Yau 予想周辺の話題

X を Calabi–Yau 多様体，$\Sigma \subset X$ を Lagrangian とする．**Thomas–Yau (TY) 予想**は，Hamiltonian isotopy 類 $[\Sigma]$ の中に特殊 Lagrangian が存在するためには，$[\Sigma]$ が “安定” であることが必要十分であると主張している．この安定性については未知のことが多く，深谷圏に対する Bridgeland 安定性がその候補であると予想されているが，一般には定式化さえ困難である．[7] では X が複素 2 次元の場合に外側の超 Kähler 構造を使って平均曲率流の振る舞いを調べ，任意の特殊 Lagrangian は平均曲率流に沿って線形安定（つまり，十分に小さい変形に対しては安定）であることを示した．

一方で，Strominger–Yau–Zaslow ミラー対象性の文脈において，特殊 Lagrangian と **deformed Hermitian–Yang–Mills (dHYM) 方程式**と呼ばれる X 上の正則直線束 L 上の fiber 計量に対する方程式は等価であることが知られている．私はこの複素幾何学的な視点からのアプローチを推し進め，次のことを証明した．まず，[3] では X が dHYM 計量を許容しない Kähler 曲面の場合に，線束平均曲率流（Lagrangian 平均曲率流のミラー版）の時間大域的な挙動を調べ，無限時間で特異点が形成されるような具体例を構成し，さらにこの特異点集合が負の自己交叉数を持つ代数曲線となっていることを示した．これは dHYM 計量の存在が代数幾何学的な安定性と密接に関与していることを示唆する結果である．次に，[4] において私は線束平均曲率流とは異なる新しい幾何学的フローを導入し，このフローが任意の almost calibrated な初期値に対して時間大域的に解け，dHYM 計量が存在すれば収束することを示した．さらに [1] において，supercritical dHYM 方程式の解が存在するための代数幾何学的な必要十分条件を完全に決定した．これは，中井–Moishezon 判定法（正則直線束に対する豊富性の判定法）の高次元版の亜種と考えられる．[15] では S. K. Donaldson, X. Chen によって導入された J-方程式（正則直線束上の標準計量の方程式）をより一般の正則ベクトル束上の fiber 計量に対する方程式へと一般化し，その基本的な性質と具体例について調べた．またその応用として，任意の階数の正則ベクトル束上で，J-方程式の十分小さな変形から dHYM 方程式の解が得られることを示した．